SUCESIONES Y SERIES

TOMO II

YU TAKEUCHI

Profesor titular de la Universidad Nacional de Colombia

EDITORIAL LIMUSA
MEXICO 1976

PROLOGO

Este libro no es un texto de estudio, Está dirigido a personas interesadas en aprender a manejar y dominar sucesiones y series.

Un buen conocimiento y manejo de las sucesiones y las series es indispensable para quien aspire a estudiar y profundizar en la rama del análisis matemático en general.

Sobre este tema hay poca teoría lo cual dificulta su práctica ya que en cada problema hay que utilizar métodos particulares. Teniendo en cuenta lo anterior, en este trabajo se trata de presentar los conceptos básicos de sucesiones y series utilizando abundantes dibujos, ejemplos y ejercicios en el desarrollo de cada paso.

Los únicos conocimientos que se requieren para adentrarse en este estudio son los de cálculo I y II. Con estas bases se inicia y se pretende llegar a un nivel un poco superior al del primer grado en matemáticas de la Universidad Nacional.

Al final del segundo tomo se incluye un apéndice en donde el lector encontrará algunas aplicaciones de sucesiones de funciones. Se señala entre estas aplicaciones : El teorema de aproximación de Weierstrass y un teorema de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Dada la importancia y utilidad del tema, y el vacío de obras didácticas que sobre él hay, se espera que este libro llegue a satisfacer la necesidad de muchos lectores.

Por último, quiero reconocer y agradecer al mismo tiempo la invaluable ayuda que me brindó el profesor Eduardo Mantilla leyendo y corregiendo la totalidad de los manuscritos, realizando el fastidioso trabajo de la revisión de las pruebas de esta publicación.

YU TAKEUCHI

Agosto de 1971

CONTENIDO

Tomo I

Capítulo I SUCESIONES

§ 1 . Sucesión 1
§ 2 Propiedades de la sucesión convergente 4
§ 3 Teorema de Weierstrass 9
§ 4 Límites fundamentales 12
§ 5 Extremo superior , extremo inferior 21
§ 6 Límite superior y límite inferior de una sucesión 26
§ 7 Propiedades del límite superior y del límite inferior 29
§ 8 Ejercicios adicionales 44

Capítulo II SERIES

§ 9 Series 68
§ 10 Serie telescópica 77
§ 11 Condición de Cauchy. Serie de términos positivos 84
§ 12 Algunos criterios de convergencia 97
§ 13 Serie alternada 106
§ 14 Convergencia absoluta 108
§ 15 Comparación con la integral impropia 112
§ 16 Criterio de Dirichlet 120
§ 17 Inserción en paréntesis 123
§ 18 Reordenación de una serie 128
§ 19 Suma de Césaro 136
Ejercicios adicionales 142

Capítulo III DOBLE SERIE

§ 20 Doble sucesión 180
§ 21 Doble serie 189
§ 22 Reordenación de una serie sencilla en una doble serie 193
§ 23 Reordenación de una doble serie en una serie simple 197
§ 24 Producto de dos series 201
Ejercicios adicionales 211

CONTENIDO

Tomo II

Capítulo IV PRODUCTO INFINITO

§ 25 Producto infinito 221
§ 26 Condición de Cauchy 225
Ejercicios adicionales 242

Capítulo V SUCESION DE FUNCIONES

§ 27 Límite de una sucesión de funciones 256
§ 28 Convergencia uniforme 258
§ 29 Algunas propiedades de la convergencia uniforme 278
§ 30 Condición de Cauchy para la convergencia uniforme 294
§ 31 Criterio de Dirichlet y de Abel 305
§ 32 Convergencia uniforme e integración 311
§ 33 Convergencia uniforme y derivación 321
§ 34 Convergencia en media 329
§ 35 Convergencia uniforme del producto infinito 336
§ 36 Serie de potencias 342
§ 37 Fórmula de Taylor 368
§ 38 Continuidad de la serie de potencias en los puntos extremos del círculo de convergencia 379
Ejercicios adicionales 391

Capítulo VI ALGUNAS APLICACIONES DE SUCESIONES DE FUNCIONES

§ 39 Teorema de aproximación de Weierstrass 419
§ 40 Teorema de existencia 432

INDICE 446
Bibliografía 448

CAPITULO IV

PRODUCTO INFINITO

§ 25 Producto infinito

Dada una sucesión

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

con el objeto de multiplicar todos los elementos de la sucesión, consideremos una nueva sucesión de la siguiente manera :

$$\{P_n\} = \{a_1, a_1 \times a_2, a_1 \times a_2 \times a_3, \ldots, a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n, \ldots\}$$

donde P_n es el producto parcial de los primeros n factores, esta nueva sucesión se llama *EL PRODUCTO INFINITO* y se nota :

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \{P_n\}, \quad P_n = a_1 \times a_2 + \ldots \times a_n \qquad (1)$$

Si algún factor , digamos a_s , es igual a cero , entonces todos los productos parciales P_n a partir de P_s son nulos , así se tiene la sucesión trivial :

$$\{a_1, \ldots, a_1 a_2 \ldots a_{s-1}, 0, 0, 0, \ldots\}.$$

Para evitar este caso , siempre supondremos que

$$a_n \neq 0 \qquad \textit{para todo } n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Si la sucesión $\{P_n\}$ converge a un límite P *diferente de cero*, entonces se dice que el producto $\prod_1^{\infty} a_n$ converge a P y se nota :

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = P. \qquad (2)$$

Si $\{P_n\}$ diverge , ó tiende a cero se dice que el producto $\prod_1^{\infty} a_n$ es divergente . Nótese que el número 0 es el único número real que no tiene *INVERSO* multiplicativo , razón por la cual es conveniente exceptuar el número cero del conjunto de los límites .

EJEMPLO 56

$$\prod_{n=1}^{\infty} \{ 1 + \frac{1}{n+1} \} .$$

$$P_n = (1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3}) \ldots (1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{1}{n+1})$$

$$= \frac{3}{2} \frac{4}{3} \frac{5}{4} \ldots \frac{n+2}{n+1} = \frac{n+2}{2} ,$$

Como $\{P_n\} = \{\frac{n+2}{2}\} \to +\infty \ (n \to \infty)$, *entonces el producto diverge a* $+\infty$:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n+1}) = +\infty . \blacksquare$$

EJEMPLO 57

$$\prod_{n=1}^{\infty} \{ 1 - \frac{1}{n+1} \} .$$

$$P_n = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) \ldots (1 - \frac{1}{n+1})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{3}{4} \ldots \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty) ,$$

entonces el producto diverge a cero *(no se puede decir : "el producto* converge *a cero* ?") :

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 0 . \blacksquare$$

NOTA En el caso del producto :

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n}) ,$$

el primer factor es 0, luego $P_n = 0$ *para todo* n. Para evitar el resultado trivial $\{P_n\} = \{0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$ consideramos el producto a partir del segundo factor *eliminando* el factor nulo, así se obtiene el producto infinito del ejemplo 57

EJEMPLO 58

Sea

$$\prod_{n=1}^{\infty} \{ 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \} .$$

$$P_n = (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \ldots (1 - \frac{1}{(n+1)^2})$$

$$= (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) \cdots (1 - \frac{1}{n+1})(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3}) \cdots (1 + \frac{1}{n+1})$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2}{3} \cdots \frac{n}{n+1}\frac{3}{2}\frac{4}{3} \cdots \frac{n+2}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}\frac{n+2}{2} \to \frac{1}{2} \quad (n \to \infty) .$$

entonces , el producto infinito converge a $\frac{1}{2}$, *o sea*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \{ 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \} = \frac{1}{2} . \blacksquare$$

Observación

El producto $\prod_{1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n+1})$ *diverge a* $+\infty$ *y el producto* $\prod_{1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n+1})$ *diverge a* 0 , *y el producto de los dos productos divergentes :*

$$\prod_{1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n+1}) \times \prod_{1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = \prod_{1}^{\infty} (1 - \frac{1}{(n+1)^2})$$

converge *en el ejemplo 58 , caso similar a la serie infinita* la suma *de dos series divergentes puede converger , por ejemplo :*

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots = +\infty ,$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{-1}{2n} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \cdots = -\infty ,$$

y $\sum_{1}^{\infty} [\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}] = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2 .$ ●

EJEMPLO 59

Sea $\prod_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + \frac{1}{n+1}]$

$$P_n = (-\frac{1}{2})(\frac{4}{3})(-\frac{3}{4})(\frac{6}{5})(-\frac{5}{6}) \cdots (\frac{n+2}{n+1}) \quad \text{ó} \quad (-\frac{n}{n+1})$$

$$= \begin{cases} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \\ (-1)^{n/2} \frac{n+2}{2(n+1)} & \text{si } n \text{ es par} . \end{cases}$$

entonces

$$\overline{lim}\ P_n = \frac{1}{2}\ ,\quad \underline{lim}\ P_n = -\frac{1}{2}\ ,$$

y el producto infinito diverge. ■

EJERCICIO 159

Investigar la convergencia o divergencia del producto infinito :

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left[\frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}\right]$$

Solución

$$n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1)$$

$$(n+1)^3 + 1 = (n+2)\{(n+1)^2 - (n+1) + 1\} = (n+2)(n^2+n+1)\ ,$$

sea $P_n = \prod_{k=2}^{n+1} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$ entonces

$$P_n = \frac{(2-1)(2^2+2+1)}{9}\times\frac{(3-1)(3^2+3+1)}{(2+2)(2^2+2+2)}\times\cdots\times\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)[(n-1)^2+(n-1)+1}\times\frac{(n+1)^3-1}{(n+2)(n^2+n+1)}$$

$$= \frac{1\ \ 2\ \ 3\ \ \{(n+1)^3 - 1\}}{9\ \ n\ (n+1)(n+2)} \to \frac{2}{3} \quad (n\to\infty)$$

o sea,

$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2}{3} \quad (\text{el producto converge a } \frac{2}{3}\ .)$$ ■

EJERCICIO 160

Hallar el producto parcial e investigar la convergencia o divergencia del producto infinito :

$$\prod_{n=o}^{\infty}(1 + x^{2^n}) \qquad |x| < 1\ .$$

Solución

Sea $P_n = \prod_{k=o}^{n-1}(1 + x^{2^k})$

entonces , por inducción se tiene :

$$P_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{(2^n - 1)}. \qquad (3)$$

En realidad:

(A) $P_1 = 1 + x$.

(B) Suponemos válida la relación (3), entonces

$$P_{n+1} = P_n \times (1 + x^{2^n})$$

$$= (1 + x + x^2 + \ldots + x^{2^n - 1})(1 + x^{2^n})$$

$$= 1 + x + \ldots + x^{2^n - 1} + x^{2^n} + x^{(2^n + 1)} + \ldots + x^{(2^{n+1} - 1)}.$$

De (3) se tiene:

$$\lim_{n \to \infty} P_n = \sum_0^\infty x^n = \frac{1}{1 - x}. \quad (\textit{el producto converge a } \frac{1}{1 - x}.)$$

■

§ 26 Condición de Cauchy

Dado un producto infinito $\prod_1^\infty a_n$, aplicando la condición de Cauchy a la sucesión $\{ \prod_{k=1}^n a_k \}$, junto con la exigencia de que el límite sea *diferente de cero* en caso de convergencia, obtenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 21

El producto infinito $\prod_{n=1}^\infty a_n$ converge si y sólo si, *dado* $\epsilon > 0$ *existe* N *tal que* $n \geq N$ *implica*

$$|a_{n+1} \times a_{n+2} \times \ldots \times a_{n+q} - 1| < \epsilon \quad \textit{para todo} \quad p = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (4)$$

La condición (4) se llama Condición de Cauchy para el producto infinito.

Demostración

(i) Supongamos que $\prod_{n=1}^\infty a_n = P \quad (P \neq 0)$, *o sea*

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} a_k = P .$$

Como $P \neq 0$, *dado* $\epsilon > 0$ *existe* N *tal que*

$$n \geq N \text{ implica } \left| \prod_{k=1}^{n} a_k - P \right| < \text{mínimo de } \left\{ \frac{\epsilon |P|}{4} , \frac{|P|}{2} \right\} .$$

Entonces si $n \geq N$ *tenemos para todo* q *:*

$$\left| \prod_{k=1}^{n+q} a_k - \prod_{k=1}^{n} a_k \right| < \left| \prod_{1}^{n+q} a_k - P \right| + \left| \prod_{1}^{n} a_k - P \right| < \frac{\epsilon |P|}{2} , \qquad (5)$$

pero como

$$\left| \prod_{k=1}^{n} a_k \right| \geq |P| - \frac{|P|}{2} = \frac{|P|}{2} > 0 ,$$

dividiendo la desigualdad (5) por $\left| \prod_{k=1}^{n} a_k \right|$ $(\neq 0)$ *se tiene :*

$$\left| \frac{\prod_{k=1}^{n+q} a_k}{\prod_{k=1}^{n} a_k} - 1 \right| \leq \frac{\epsilon |P|}{2} \Big/ \left| \prod_{1}^{n} a_k \right| \leq \frac{\epsilon |P|}{2} \Big/ \frac{|P|}{2} = \epsilon ,$$

o sea

$$\left| \prod_{k=n+1}^{n+q} a_k - 1 \right| < \epsilon .$$

(ii) Ahora , supongamos la condición (4) , entonces :

$$|a_{N+1} \times a_{N+2} \times \cdots \times a_{N+q}| < 1 + \epsilon \qquad \text{para todo } q ,$$

esto es , la sucesión $\left| \prod_{k=1}^{n} a_k \right|$ *es acotada* #Nota *, o sea que existe una constante* M (> 0) *tal que*

$$\left| \prod_{k=1}^{n} a_k \right| \leq M \qquad \text{para todo } n .$$

En la desigualdad (4) , multiplicando por $\left| \prod_{1}^{n} a_k \right|$ *se tiene:*

. . . . . .

#Nota *Basta escoger una cota* M *como sigue:*

$$M = \text{Máximo } \left\{ \left| \prod_{1}^{n} a_k \right| , n = 1, 2, \ldots, N, \left| \prod_{1}^{N} a_k \right| (1+\epsilon) \right\} .$$

$$\left| \left[\prod_{k=1}^{n} a_k \right] \times a_{n+1} \times \cdots \times a_{n+q} - \prod_{k=1}^{n} a_k \right| < \epsilon \left| \prod_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \epsilon M ,$$

o sea

$$\left| \prod_{k=1}^{n+q} a_k - \prod_{k=1}^{n} a_k \right| < \epsilon M \quad (\textit{para todo } q) .$$

Entonces, la sucesión $\left\{ \prod_{k=1}^{n} a_k \right.$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ $\left.\right\}$ *satisface la condición de Cauchy, o sea que existe el límite:*

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} a_k = P .$$

En la desigualdad (4), tomando límite cuando $q \to \infty$ *se tiene:*

$$\left| \lim_{q \to \infty} a_{n+1} \times \cdots \times a_{n+q} - 1 \right| = \left| \frac{\lim_{q \to \infty} a_1 a_2 \cdots a_{n+1} \cdots a_{n+q}}{a_1 a_2 \cdots a_n} - 1 \right| \leq \epsilon ,$$

o sea,

$$\left| \frac{P}{a_1 a_2 \cdots a_n} - 1 \right| \leq \epsilon ,$$

esta desigualdad implica que $P \neq 0$ *ya que* ϵ *puede ser menor que 1, o sea que el producto infinito converge.* ■

Observación

Comparando la condición de Cauchy para la serie y la condición para el producto :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+q} a_k - 0 \right| = \left| a_{n+1} + \cdots + a_{n+q} \right| < \epsilon \qquad (\textit{Serie } \sum_{1}^{\infty} a_n)$$

$$\left| \prod_{k=n+1}^{n+q} a_k - 1 \right| = \left| a_{n+1} \times \cdots \times a_{n+q} - 1 \right| < \epsilon \qquad (\textit{Producto } \prod_{1}^{\infty} a_n) ,$$

nótese que 0 es *el elemento neutro* de la adición, mientras que 1 es el *elemento nuetro* de la multiplicación. Si P_n es el producto parcial :

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$$

entonces

$$S_n = \log P_n = (\log a_1) + (\log a_2) + \ldots + (\log a_n)$$

es la suma parcial de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\log a_n) \qquad (6)$$

Se ve inmediatamente que $P_n \to P \neq 0$ si y sólo si

$$\log P_n = S_n \to \log P \quad (n \to \infty),$$

o sea que la serie (6) converge si y sólo si el producto infinito $\prod_1^{\infty} a_n$ converge . Se puede ver porqué hemos excluido el límite 0 en caso de la convergencia del producto , ya que si $P_n \to 0$ entonces la serie (6) diverge *(log 0 NO EXISTE .)* Aplicando la condición de Cauchy a la serie (6) , se tiene :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+q} \log a_k \right| < \epsilon \quad (\text{para } n > N \text{ , para todo } q > 0)$$

o

$$\left| \log \{a_{n+1} \times \ldots \times a_{n+q}\} \right| < \epsilon .$$

Entonces

$$e^{-\epsilon} < a_{n+1} \times \ldots \times a_{n+q} < e^{\epsilon} .$$

Para ϵ pequeño , tenemos la siguiente fórmula de aproximación :

$$e^{\epsilon} \doteq 1 + \epsilon \ , \quad e^{-\epsilon} \doteq 1 - \epsilon \ ,$$

por lo tanto se tiene :

$$1 - \epsilon < a_{n+1} \times \ldots \times a_{n+q} < 1 + \epsilon \ ,$$

o sea :

$$| a_{n+1} \times \ldots \times a_{n+q} - 1 | < \epsilon \qquad (\textit{Condición (4)}) .$$

EJEMPLO 60

En el ejemplo 57 , hemos visto que el producto $\prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$ *diverge a cero . Observemos la serie :*

$$\sum_1^{\infty} \log \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) .$$

De la desigualdad conocida #Nota :

$$\log(1-x) < -x \quad (0 < x < 1)$$

se tiene :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1-\frac{1}{n+1}\right) < \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = -\infty . \quad \blacksquare$$

COROLARIO

Si el producto $\prod_{1}^{\infty} a_n$ converge entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 . \tag{7}$$

Demostración

En la condición (4), tomemos $q = 1$:

$$|a_{n+1} - 1| < \epsilon . \quad \blacksquare$$

Fvidentemente, $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ es la condición necesaria para la convergencia del producto (Fjemplos 56, 57). En el caso de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ la condición correspondiente fue

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 . \qquad \left(\begin{array}{l}\textit{Condición necesaria para la conver-}\\ \textit{gencia de la serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n .\end{array}\right)$$

De la condición (7), es conveniente escribir los factores del producto a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ en la forma

$$a_n = 1 + u_n \qquad (n = 1,2,3, \ldots),$$

así, nuestro producto infinito se expresa como :

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n) \tag{8}$$

. . . . . .

Nota

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots < -x .$$

y la condición necesaria para la convergencia del producto infinito (8) es

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \qquad (9)$$

Convergencia absoluta

Dado un producto infinito (8), si el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |u_n|) \qquad (10)$$

converge entonces se dice que el producto (8) converge absolutamente, y tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 22

La convergencia absoluta implica la convergencia del producto infinito.

Demostración

De la siguiente desigualdad: * Nota

$$|(1 + u_{n+1})(1 + u_{n+2}) \ldots (1 + u_{n+q}) - 1|$$

$$\leq (1 + |u_{n+1}|)(1 + |u_{n+2}|) \ldots (1 + |n_{n+q}|) - 1, \qquad (11)$$

la condición de Cauchy para el producto (10) implica la condición de Cauchy para el producto (8). ■

* Nota

$$|(1 + A_1)(1 + A_2) \ldots (1 + A_q) - 1|$$

$$= |(A_1 + A_2 + \ldots + A_q) + (A_1A_2 + A_1A_3 + \ldots) + \ldots + (A_1A_2 \ldots A_q)|$$

$$\leq [|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_q|] + [|A_1||A_2| + \ldots) + \ldots + [|A_1||A_2| \ldots |A_q|]$$

$$= (1 + |A_1|)(1 + |A_2|) \ldots (1 + |A_q|) - 1. \bullet$$

Observación

La serie $\Sigma\, a_n$ converge si converge la serie $\Sigma\, |a_n|$, mientras que el producto $\Pi\, (1 + u_n)$ converge si converge el producto $\Pi\, (1 + |u_n|)$. ■

Correspondiente a la serie de términos positivos , $\Sigma\, a_n$, $a_n \geq 0$, consideremos el producto de la forma $\Pi\,(1+u_n)$, $u_n \geq 0$, sea P_n el producto parcial :

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} (1+u_k) = (1+u_1) \times \ldots \times (1+u_n)$$

entonces

$$P_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1} (1+u_k) = (1+u_1)\ldots(1+u_n)(1+u_{n+1})$$

$$= P_n \cdot (1+u_{n+1}) .$$

Como $u_n \geq 0$ para todo n , entonces $1+u_{n+1} \geq 1$, o sea

$$P_{n+1} \geq P_n \quad (\textit{para todo } n) ,$$

esto es , la sucesión $\{P_n\}$ es creciente , entonces tenemos el siguiente resultado :

El producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$ $(u_n \geq 0)$ converge, ó diverge a $+\infty$.

TEOREMA 23

El producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$, $u_n \geq 0$ *para todo* n , converge si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge .

Demostración

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \ , \quad P_n = (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)$$

de la desigualdad :

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \leq (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n) = P_n$$

se tiene que la convergencia del producto infinito implica la convergencia de la serie . Por otra parte , tenemos la desigualdad : #Nota

$$(1+u_k) \leq e^{u_k} \quad (u_k \geq 0)$$

entonces

$$P_n = (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n) \leq e^{u_1}\, e^{u_2} \ldots e^{u_n}$$

$$= e^{u_1+u_2+\ldots+u_n} = e^{S_n}$$

por lo tanto, la convergencia de la serie implica la acotación de $\{P_n\}$, *o sea que el producto infinito converge.* ■

 # Nota

Si $x \geq 0$ *se tiene:*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \geq 1 + x.$$

EJEMPLO 61

(i) $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n+1})$ *diverge ya que* $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty$.

(ii) $\prod_{n=1}^{\infty} [1 - \frac{1}{(n+1)^2}]$ *converge absolutamente ya que* $\sum_1^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ *converge.*

(iii) $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \prod_{n=2}^{\infty} \{1 - \frac{2}{n^3 + 1}\}$ *converge absolutamente ya que la serie* $\sum_2^{\infty} \frac{2}{n^3 + 1}$ *converge.*

iv) $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n)$, $|x| < 1$ *converge absolutamente ya que la serie* $\sum_1^{\infty} |x^n| = \sum_1^{\infty} |x|^n$ *converge si* $|x| < 1$. ■

EJEMPLO 62

Sean $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *dos sucesiones tales que*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{b_n}{n}, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b > 0,$$

demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Solución

Como $\lim_{n\to\infty} b_n = b > 0$, *existe* m *tal que*

$$b_k > 0 \quad \text{para todo} \quad k \geq m.$$

Tenemos :

$$\prod_{k=1}^{n} \left\{ 1 - \frac{b_{m-k}}{m-k} \right\} = \left\{ 1 - \frac{b_{m-1}}{m-1} \right\} \left\{ 1 + \frac{b_{m+2}}{m+2} \right\} \cdots \left\{ 1 + \frac{b_{m+n}}{m+n} \right\}$$

$$\cdot \frac{a_{m-1}}{a_{m-2}} \cdots \frac{a_{m+n}}{a_{m-n+1}} = \frac{a_{m+1}}{a_{m+n+1}} .$$

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{m-k}}{m-k}$ *diverge a* $-\infty$ *ya que la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b}{m+k} = +\infty$

luego el producto infinito :

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{b_{m-k}}{m-k} \right\} \qquad \textit{diverge} ,$$

o sea ,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{m-1}}{a_{m-n-1}} = \frac{a_{m-1}}{\lim_{n \to \infty} a_n} = -\infty ,$$

esto es .

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 . \quad \blacksquare$$

EJERCICIO 161

Demostrar :

$$\lim_{n \to \infty} (1+a)(1-\frac{a}{2}) \cdots (1+\frac{a}{n}) = +\infty \qquad (a > 0) .$$

NOTA

En el ejercicio 82 hemos visto que :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(1+a)(1+\frac{a}{2}) \cdots (1+\frac{a}{n})}{n^a} = L . \quad \blacksquare$$

EJERCICIO 162

Demostrar que el siguiente producto converge absolutamente :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left\{ (1+\frac{x}{n}) e^{-x/n} \right\}$$

donde x es cualquier número real .

Solución

Sea

$$1 + u_n = (1+\frac{x}{n}) e^{-x/n} .$$

entonces

$$u_n = (1 + \frac{x}{n})\, e^{-x/n} \quad 1 ,$$

pero , de la desigualdad : # Nota 1

$$0 \leq 1 - (1 + t)\, e^{-t} \leq t^2 \qquad (\text{si } t \geq -1)$$

se tiene que

$$u_n \leq \frac{x^2}{n^2} \qquad (\text{para } n \text{ mayor que } |x|) .$$

Entonces la serie $\sum_1^\infty u_n$ converge . ■

NOTA 1

Sea $f(t) = 1 - (1 + t)\, e^{-t}$ entonces $f(0) = 0$, $f'(t) = t\, e^{-t}$,

el valor mínimo de $f(t)$ es igual a cero , o sea que $f(t) \geq 0$ para todo t .

Sea $g(t) = t^2 - \{ 1 - (1 + t)\, e^{-t} \}$ entonces $g(0) = 0$, $g(-1) = 0$,

$$g'(t) = 2t - t\, e^{-t} = t(2 - e^{-t}) ,$$

por lo tanto , se tiene que $g(t) \geq 0$ si $t \geq -1$.

NOTA 2

Utilizando el símbolo O tenemos :

$$e^{-x/n} = 1 - \frac{x}{n} + O(1/n^2) ,$$

$$(1 + \frac{x}{n})\, e^{-x/n} = (1 - \frac{x}{n}) \{ 1 - \frac{x}{n} - O(\frac{1}{n^2}) \} = 1 - O(\frac{1}{n^2}) .$$

Como $\sum^\infty O(1/n^2)$ converge absolutamente , entonces se tiene que el producto dado converge absolutamente . ●

EJERCICIO 163

Demostrar que el siguiente producto converge absolutamente :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \{ (1 + \frac{x}{c - n})\, e^{-x/n} \} .$$

Sugerencia

$$(1+\frac{x}{c+n})\{1-\frac{x}{n}+O(\frac{1}{n^2})\} = 1+\frac{x}{c+n}-\frac{x}{n}+O(\frac{1}{n^2})$$

$$= 1+O(\frac{1}{n^2}). \quad \blacksquare$$

EJERCICIO 164

Sea $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(s+1)(s+2)\dots(s+k)}$ $(c_k \geq 0$ *para todo* $k, s>0)$

una serie convergente, demostrar que la siguiente serie también converge:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(s-t+1)(s-t+2)\dots(s-t+k)k^t} \quad (0 \leq t < s+1).$$

Solución

$$\frac{(s-t+1)(s-t+2)\dots(s-t+k)\,k^t}{(s+1)(s+2)\dots(s+k)}$$

$$= \{1-\frac{t}{s+1}\}\{1-\frac{t}{s+2}\}\dots\{1-\frac{t}{s+k}\}e^{t\log k}$$

$$= \{1-\frac{t}{s+1}\}\{1-\frac{t}{s+2}\}\dots\{1-\frac{t}{s+k}\}e^{t[1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{k}-C+O(\frac{1}{k})]}$$

$$= \prod_{j=1}^{k}\{(1-\frac{t}{s+j})e^{t/j}\}e^{-tC}e^{tO(1/k)}$$

Del ejercicio 163, el producto infinito:

$$\prod_{j=1}^{\infty}\{(1-\frac{t}{s+j})e^{t/j}\} \quad \textit{converge al límite } L \neq 0,$$

entonces:

$$\frac{(s-t+1)\dots(s-t+k)\,k^t}{(s+1)(s+2)\dots(s+k)} \xrightarrow[(k\to\infty)]{} L\cdot e^{-tC} \neq 0 \quad . \blacksquare$$

Ahora, consideremos el producto:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n) \quad (u_n \geq 0), \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0. \qquad (12)$$

Como $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, supongamos para mayor sencillez que

$$|u_n| < 1 \quad \textit{para todo} \quad n = 1,2,3,\dots \quad .$$

Sea P_n el producto parcial :

$$P_n = (1 - u_1)(1 - u_2) \ldots (1 - u_n)$$

entonces

$$P_{n+1} = (1 - u_1) \ldots (1 - u_n)(1 - u_{n+1}) = P_n (1 - u_{n+1}) \leqslant P_n ,$$

o sea que la sucesión $\{P_n\}$ es decreciente , e inferiormente acotada por 0 , luego existe el límite :

$$\lim_{n \to \infty} P_n = P .$$

El límite P puede ser cero , entonces tenemos el siguiente resultado :

El producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - u_n)$ ($u_n \geqslant 0$ *para todo* n , $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$) converge , o diverge a cero .

TEOREMA 24

El producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - u_n)$, $u_n \geqslant 0$ para todo n , converge si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge .

Demostración

(i) Si la serie $\sum u_n$ *converge entonces el producto* $\prod^{\infty} (1 + u_n)$ *converge (Teorema 23) , o sea que el producto dado converge absolutamente.*

(ii) Si el producto $\prod^{\infty} (1 - u_n)$ *converge* *Nota , *entonces existe* $P > 0$ *tal que*

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - u_k) = (1 - u_1) \ldots (1 - u_n) \geqslant P \quad (\textit{para todo } n) .$$

De la desigualdad : **Nota

$$1 + u_k \leqslant \frac{1}{1 - u_k} \quad (\textit{para todo } k)$$

tenemos :

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + u_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - u_k} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} (1 - u_k)} \leqslant \frac{1}{P} ,$$

entonces el producto $\prod^{\infty} (1 + u_k)$ *converge , del teorema 23 se tiene que*

la serie $\sum^{\infty} u_k$ converge. ■

* Nota

$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, entonces suponemos que $u_n < 1$ para todo n.

** Nota

$1 - x^2 \leq 1$ para todo $0 \leq x < 1$, o sea, $1 - x \leq \frac{1}{1-x}$.

EJEMPLO 63

(i) $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n+1})$ diverge a cero ya que $\sum \frac{1}{n+1} = +\infty$.

(ii) $\prod_{n=1}^{\infty} [1 - \frac{1}{(n-1)^2}]$ converge ya que $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ converge.

(iii) $\lim_{n\to\infty} (1 - a)(1 - \frac{a}{2})(1 - \frac{a}{3}) \ldots (1 - \frac{a}{n}) = 0$ ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n} = \infty.$$

EJERCICIO 165

Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{a}{n}$ converge si $a > -1$, diverge si $a \leq -1$.

Solución

$$a_n = \binom{a}{n} = \frac{a+1-1}{1} \frac{a+1-2}{2} \cdots \frac{a+1-n}{n}$$

$$= (-1)^n \{1 - (a+1)\}\{1 - \frac{a+1}{2}\} \ldots \{1 - \frac{a+1}{n}\}.$$

i) $a > -1$.

Evidentemente se tiene:

$$|a_{n+1}| = |a_n| (1 - \frac{a+2}{n+1}) < |a_n| \quad \text{(para todo } n \text{ grande)}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{a+1}{k}) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{a+1}{k}) = 0,$$

por lo tanto, la serie $\sum a_n$ converge condicionalmente.

ii) $a < -1$.

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{a+1}{k}) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{a+1}{k}) = +\infty ,$$

entonces la serie diverge.

iii) $a = -1$.

$$a_n = (-1)^n \quad , \quad la\ serie \quad \Sigma\, a_n = \Sigma\, (-1)^n \quad diverge .$$

■

EJERCICIO 166

Verificar la siguiente identidad :

$$(1 - \frac{x}{1})(1 - \frac{x}{2}) \ \ldots \ (1 - \frac{x}{n})$$

$$= 1 - x + \frac{x(x-1)}{2!} - \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!} .$$

Demostrar que el producto diverge cuando $n \to \infty$ *para todo* x *diferente de cero, mientras que la serie converge para todo* $x > 0$.

Solución

Sea

$$f(x) = 1 - x + \frac{x(x-1)}{2!} - \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}$$

Para todo k *natural* ($k \leq n$) *se tiene :*

$$f(k) = 1 - k + \frac{k(k-1)}{2!} - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} + \ldots + (-1)^k \frac{k(k-1)\ldots 1}{k!}$$

$$= 1 + \binom{k}{1}(-1) + \binom{k}{2}(-1)^2 + \binom{k}{3}(-1)^3 + \ldots + \binom{k}{k}(-1)^k$$

$$= (1-1)^k = 0 \quad (\ desarrollo\ binomial\ ),$$

entonces se tiene :

$$f(x) = D\,(1 - \frac{x}{1})(1 - \frac{x}{2}) \ \ldots \ (1 - \frac{x}{n})$$

donde D *es una constante. Reemplazando* $x = 0$ *tenemos :*

$$f(0) = 1 = D ,$$

por lo tanto , obtenemos la identidad deseada .

Evidentemente el producto

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{x}{k}) \quad (x > 0)$$

diverge a cero ya que $\sum \frac{x}{k} = +\infty$.

Por otra parte tenemos :

$$(-1)^k \frac{x(x-1) \ldots (x-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{(-1)^k (x-1)(x-2) \ldots (x-k+1)}{(k-1)!} \quad \frac{(-1)^{k+1}(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)(x-k)}{k!}$$

$$(k \geq 2)$$

entonces :

$$1 - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x(x-1) \ldots (x-k+1)}{k!}$$

$$= 1 - x + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k (x-1) \ldots (x-k+1)}{(k-1)!} - \frac{(-1)^{k+1}(x-1) \ldots (x-k)}{k!} \right]$$

$$= 1 - x + (x-1) \cdot \lim_{k \to \infty} \frac{(-1)^{k+1}(x-1) \ldots (x-k)}{k!} = 0 \qquad (x > 0) ,$$

o sea que la serie converge a cero .

Si $x < 0$ *, el producto infinito diverge a* $+\infty$ *, y la serie también diverge a* $+\infty$ *.* ■

Del teorema 23 y 24 , es fácil ver la convergencia o divergencia de un producto infinito de la forma :

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n) \qquad \text{ó} \qquad \prod_{n=1}^{\infty} (1 - u_n) \quad (\text{con } u_n \geq 0)$$

comparándolo con la serie $\sum u_n$ $(u_n \geq 0)$, pero este método NO puede ser generalizado .

EJEMPLO 64

Sea $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n})$.

$$P_{2n} = \prod_{k=1}^{2n}(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k})$$

$$= (1+1)(1+\frac{1}{3}) \ldots (1+\frac{1}{2n-1})(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4}) \ldots (1-\frac{1}{2n})$$

$$= 2\ \frac{4}{3}\ \frac{6}{5} \ldots \frac{2n}{2n-1}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4} \ldots \frac{2n-1}{2n} = 1$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} P_{2n} = 1 .$$

También :

$$\lim_{n\to\infty} P_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} P_n \cdot (1 + \frac{1}{2n+1}) = 1 ,$$

por lo tanto , el producto infinito CONVERGE a 1 .

EJEMPLO 65

Sea $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}})$.

$$(1-\frac{1}{\sqrt{2k}})(1+\frac{1}{\sqrt{2k+1}}) < (1-\frac{1}{\sqrt{2k+1}})(1+\frac{1}{\sqrt{2k+1}}) = 1 - \frac{1}{2k+1} ,$$

entonces tenemos :

$$\prod_{k=2}^{2n+1}\{1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\} = \prod_{j=1}^{n}(1-\frac{1}{\sqrt{2j}})(1+\frac{1}{\sqrt{2j+1}})$$

$$< \prod_{j=1}^{n}(1 - \frac{1}{2j+1}) \to 0 \quad (n\to\infty)$$

ya que $\sum \frac{1}{2j+1} = +\infty$, *por lo tanto el producto infinito DIVERGE a cero .*

En los ejemplos 64 y 65 , las dos series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

convergen condicionalmente, sin embargo el producto del ejemplo 64 converge y el producto del ejemplo 65 diverge. (Ver los ejercicios adicionales 171, 172 y 173).

EJERCICIO 167

Investigar la convergencia o divergencia de

$$\prod_{n=2}^{\infty} \{ 1 - \frac{(-1)^{n-1}}{n} \}.$$

Sugerencia

$$P_{2n} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \quad , \quad P_{2n+1} = P_{2n} \times \frac{2n}{2n+1} \to \frac{1}{2}. \blacksquare$$

EJERCICIO 168

Investigar la convergencia o divergencia de

$$\prod_{n=2}^{\infty} \{ 1 - \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \}.$$

Sugerencia

$$(1 - \frac{1}{\sqrt{2k+1}})(1 + \frac{1}{\sqrt{2k+2}}) < (1 - \frac{1}{\sqrt{2k+1}})(1 + \frac{1}{\sqrt{2k+1}}) = 1 - \frac{1}{2k+1}. \blacksquare$$

EJERCICIOS ADICIONALES (Producto infinito)

EJERCICIO 169

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie convergente a* S $(S \neq 0)$, *si la suma parcial* $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *es diferente de cero para todo* n, *demostrar que*

$$a_1 \prod_{n=2}^{\infty} \left[1 + \frac{a_n}{S_{n-1}} \right]$$

converge a S.

Solución

$$P_n = a_1 \prod_{k=2}^{n} [\, 1 + \frac{a_k}{S_{k-1}} \,] = a_1 \prod_{k=2}^{n} \frac{S_{k-1} + a_k}{S_{k-1}}$$

$$= a_1 \prod_{k=2}^{n} \frac{S_k}{S_{k-1}} = a_1 \frac{S_n}{S_1} = a_1 \frac{S_n}{a_1} = S_n ,$$

entonces se tiene :

$$P_n \to S \quad (n \to \infty) . \blacksquare$$

EJERCICIO 170

Hallar el producto total de :

(i) $\prod_{2}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{2^n - 2} \right]$ (ii) $\prod_{2}^{\infty} [\, 1 + \frac{1}{n^2 - 1} \,]$.

Solución (Aplicar el ejercicio 169.)

(i) *Sea* $a_n = 2^{-n}$ *entonces*

$$S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2^n - 2}{2^n}$$

luego :

$$\frac{1}{2} \prod_{2}^{\infty} \{ 1 + \frac{1/2^n}{(2^n - 2)/2^n} \} = \frac{1}{2} \prod_{2}^{\infty} \{ 1 + \frac{1}{2^n - 2} \}$$

$$= \sum_{1}^{\infty} (1/2^n) = 1 ,$$

o sea

$$\prod_2^{\infty} \{ 1 + \frac{1}{2^n - 2} \} = 2 .$$

(ii) *Sea* $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

entonces

$$S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \{ \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \} = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} ,$$

luego :

$$\frac{1}{2} \prod_2^{\infty} \{ 1 + \frac{1/n(n+1)}{(n-1)/n} \} = \frac{1}{2} \prod_2^{\infty} \{ 1 + \frac{1}{n^2 - 1} \}$$

$$= \sum_1^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 ,$$

o sea:

$$\prod_2^{\infty} \{ 1 + \frac{1}{n^2 - 1} \} = 2 . \blacksquare$$

EJERCICIO 171

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ *una serie convergente, demostrar que el producto infinito :*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \{ 1 + a_n \}$$

converge si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, diverge a* $+\infty$ *si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge a* $+\infty$, *y diverge a cero si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge a* $-\infty$.

Solución

Para mayor sencillez suponemos que $|a_n| < 1$ *para todo* n.

En la desigualdad siguiente : *Nota

$$0 < u - \log (1+u) < \frac{1}{2} u^2 \quad (si \ u > 0)$$

$$< \frac{1}{2} \frac{u^2}{1+u} \quad (si \ -1 < u < 0) ,$$

reemplazando $u = a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ *sucesivamente se obtiene:*

$$0 < (a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+q}) - \log \{(1+a_{m+1})(1+a_{m+2}) \cdots (1+a_{m+q})\}$$

$$< \frac{1}{2} [(a_{m+1})^2 + (a_{m+2})^2 + \cdots + (a_{m+q})^2] / \lambda$$

donde

$$\lambda = Inf \{ 1, \ 1 + a_k \ , \ k = 1, 2, 3, \ldots \} .$$

O sea :

$$0 < \sum_{k=1}^{q} a_{m+k} - \log \prod_{k=1}^{q} (1 + a_{m+k}) < \frac{1}{2\lambda} \sum_{k=1}^{q} (a_{m+k})^2 \qquad (13)$$

Como la serie $\Sigma (a_n)^2$ *converge, dado* $\epsilon > 0$ *existe* m *tal que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{m+k})^2 < 2\lambda\epsilon ,$$

de (13):

$$0 < \sum_{k=1}^{q} a_{m+k} - \log \prod_{k=1}^{q} (1 + a_{m+k}) < \epsilon \quad (para\ todo\ q) .$$

De acuerdo con la condición de Cauchy, el producto infinito converge si y sólo si la serie Σa_n *converge. El producto diverge a* $+\infty$ *(ó 0) si la serie diverge a* $+\infty$ *(ó* $-\infty$ *respectivamente.).* ■

* Nota

i) $u > 0$. *Sea* $f(u) = \frac{1}{2} u^2 - u + \log (1 + u)$

entonces

$$f(0) = 0 \ , \quad f'(u) = u^2/(1+u) > 0 \ ,$$

por lo tanto, se tiene que $f(u) > 0$.

ii) $u < 0$. *Sea*

$$g(u) = \frac{1}{2} \frac{u^2}{1+u} - u + \log (1 + u) \ ,$$

entonces

$$g(0) = 0 \ , \quad g'(u) = -u^2/2(1+u)^2 < 0 \ ,$$

por lo tanto se tiene que $g(u) > 0$ *si* $u < 0$.

De este ejercicio se ve inmediatamente que los productos

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right), \quad \prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$$

convergen ya que $\sum\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]^2$ converge y las series $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $\sum-\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ convergen condicionalmente.

EJERCICIO 172

Sea $\sum a_n$ *convergente condicionalmente, si* $\sum (a_n)^2$ *diverge a* $+\infty$, *demostrar que el producto* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ *diverge a CERO.*

Solución

Utilicemos la desigualdad :

$$u - \log(1+u) > \frac{1}{2}\frac{u^2}{1+u} \quad (si\ u > 0)$$

$$> \frac{1}{2}u^2 \quad (si\ 0 > u > -1)$$

entonces tenemos :

$$(a_{m+1}+\cdots+a_{m+q}) - \log\left[(1+a_{m+1})\cdots(1+a_{m+q})\right] > \frac{1}{2}\left\{(a_{m+1})^2+\cdots+(a_{m+q})^2\right\}\Big/ L$$

donde

$$L = Sup\ \{1,\ 1+a_n,\ n=1,2,3,\ldots\},$$

o sea :

$$\sum_{k=1}^{q} a_{m+k} - \log\prod_{k=1}^{q}(1+a_{m+k}) > \frac{1}{2L}\sum_{k=1}^{q}(a_{m+q})^2 \to \infty \quad (q\to\infty).$$

Entonces :

$$\log\prod_{k=1}^{q}(1+a_{m+k}) \to -\infty \quad (q\to\infty),$$

o sea que el producto infinito diverge a cero. ■

De este ejercicio, se ve que los productos :

$$\prod^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right) \quad y \quad \prod^{\infty} \left(1 - \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)$$

divergen a cero.

NOTA

Para obtener el resultado del ejercicio 172 basta suponer que

$$\overline{lim} \sum_{k=1}^{n} a_k \neq +\infty \,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 = +\infty .$$

EJERCICIO 173

Sea $\Sigma\, a_n$ *convergente condicionalmente, demostrar que el producto* $\Pi\,(1 + a_n)$ *converge, o diverge a cero de acuerdo con la convergencia o divergencia de la serie* $\Sigma\,(a_n)^2$.

Sugerencia

Ejercicio 171 y ejercicio 172. ●

EJERCICIO 174

Investigar la convergencia o divergencia de los siguientes productos:

(i) $(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{5})(1 + \frac{1}{6})(1 - \frac{1}{7}) \times \ldots .$

(ii) $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{5})(1 - \frac{1}{6})(1 + \frac{1}{7}) \times \ldots .$

(iii) $\prod_{k=1}^{\infty} \{\, 1 + (-1)^k \frac{1}{2} \,\}$

Solución

Del ejercicio 171, el producto en (i) diverge a $+\infty$, *y el producto en (ii) diverge a cero. El producto en (iii) diverge a cero de acuerdo con el ejercicio 172.* ●

solución directa

(i)

$$(1 + \frac{1}{3n-1})(1 + \frac{1}{3n})(1 - \frac{1}{3n+1}) = \{\, 1 + \frac{1}{3n} - \frac{1}{9n^2 - 1} - \frac{1}{3n(9n^2 - 1)} \,\}$$

$$= 1 + a_n$$

donde

$$a_n = \frac{1}{3n} - \frac{1}{9n^2 - 1} - \frac{1}{3n(9n^2 - 1)} > 0 \quad \text{para todo } n$$

Evidentemente :

$$\Sigma\, a_n = \Sigma \left(\frac{1}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = +\infty$$

entonces el producto $\prod^{\infty} (1 + a_n)$ *diverge a* $+\infty$ *, o sea que el producto en (i) diverge a* $+\infty$ *.*

(ii)

$$\left(1 - \frac{1}{3n-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3n}\right)\left(1 + \frac{1}{3n+1}\right) = 1 - \frac{1}{3n} - \frac{1}{9n^2 - 1} + \frac{1}{3n(9n^2 - 1)}$$

$$= 1 - b_n$$

donde

$$b_n = \frac{1}{3n} + \frac{1}{9n^2 - 1} - \frac{1}{3n(9n^2 - 1)} > 0 \quad \text{para todo } n .$$

Como la serie $\Sigma\, b_n$ *diverge a* $+\infty$ *, entonces el producto* $\prod^{\infty} (1 - b_n)$ *diverge a cero , o sea que el producto en (ii) diverge a cero .*

Otra solución

(i)

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right)\left(1 + \frac{1}{6}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right) \times \cdots\cdots$$

$$> \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right)\left(1 + \frac{1}{8}\right)\left(1 + \frac{1}{11}\right) \times \cdots \to +\infty .$$

(ii)

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right)\left(1 + \frac{1}{7}\right) \times \cdots\cdots$$

$$< \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{8}\right) \times \cdots \to 0 ,$$

puesto que $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \cdots\cdots = +\infty .$

(iii)

$$P_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right]^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0 \quad (n \to \infty) . \blacksquare$$

EJERCICIO 175

Investigar la convergencia o divergencia del producto :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n}$$

y hallar su producto total en caso de convergencia.

Solución

i) $\cos (x/2^n) = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 (x/2^{n+1}) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2^{n+1}} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x/2^{n+1}|^2 = |x|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n+1}} < +\infty ,$$

entonces el producto infinito converge absolutamente para todo x.

ii) $P_n = \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k} = \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \times \ldots \times \cos \frac{x}{2^n}$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \left[\cos \frac{x}{2^n} + \cos \frac{3x}{2^n} + \ldots + \cos \frac{(2^n - 1)x}{2^n} \right] \quad \text{\# Nota}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos \frac{(2k-1)x}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2^n}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{(x/2^n)}{\operatorname{sen} (x/2^n)} \to \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad (n \to \infty) .$$

\# Nota

$$\prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos \frac{(2k-1)x}{2^n} \qquad (14)$$

Para $n = 1$, (14) es evidente.

Suponemos válida la fórmula (14), entonces

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos \frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos \frac{(2k-1)x}{2^n} \times \cos \frac{x}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{2} \left[\cos \frac{(4k-1)x}{2^{n+1}} + \cos \frac{(4k-3)x}{2^{n+1}} \right]$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{b=1}^{2^n} \cos \frac{(2b-1)x}{2^{n+1}}$$

EJERCICIO 176

Sea $a_{2n-1} = \frac{-1}{\sqrt{n}}$, $a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$,

Demostrar que $\prod_{n=2}^{\infty}(1 + a_n)$ *converge a pesar de que la serie* Σa_n *diverge .*

Solución

$$a_{2n-1} + a_{2n} = -\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n},$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty,$$

por lo tanto , la serie Σa_n *diverge a* $+\infty$.

Abora ,

$$\prod_{n=2}^{2N}(1 + a_n) = \prod_{n=2}^{N}(1 + a_{2n-1})(1 + a_{2n})$$

$$= \prod_{n=2}^{N}(1 - \frac{1}{\sqrt{n}})(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n})$$

$$= \prod_{n=2}^{N}(1 - \frac{1}{n^{3/2}}),$$

entonces el producto infinito $\prod_{2}^{\infty}(1 + a_n) = \prod_{2}^{\infty}(1 - \frac{1}{n^{3/2}})$ *converge ya que la serie* $\Sigma \frac{1}{n^{3/2}}$ *converge .* ■

EJERCICIO 177

Sean

$a_1 = 0$, $a_{2n-1} = -\frac{1}{\sqrt{n}} (n > 1)$, $a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}} (n \geq 1)$,

demostrar que el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ *converge a pesar de que las series* Σa_n *y* $\Sigma (a_n)^2$ *divergen .*

Solución $\sum_{n=3}^{2N} a_n = \sum_{n=2}^{N}(a_{2n-1} + a_{2n})$

$$= \sum_{n=2}^{N} \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}} \right\} \to +\infty \quad (n \to \infty),$$

$$\sum_{n=3}^{2N} (a_n)^2 = \sum_{n=2}^{N} \left\{ \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}} \right)^2 \right\} \to +\infty \quad (n \to \infty).$$

Por otra parte:

$$\prod_{n=1}^{2N} (1 + a_n) = 4 \prod_{n=2}^{N} (1 + a_{2n-1})(1 + a_{2n})$$

$$= 4 \prod_{n=2}^{N} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

$$= 4 \prod_{n=2}^{N} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{2(N+1)}{N} \to 2 \quad (N \to \infty).$$

También:

$$\prod_{n=1}^{2N+1} (1 + a_n) = \prod_{n=1}^{2N} (1 + a_n)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \to 2 \quad (N \to \infty),$$

entonces el producto infinito CONVERGE a 2. ■

EJERCICIO 178

Sean $a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $a_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{n + \frac{1}{2}} + 1}$ $(n \geq 1)$, $a_1 = 0$.

Demostrar que el producto $\prod_{k=1}^{\infty} \{ 1 + (-1)^k a_k \}$ *converge a pesar de que las dos series* $\Sigma (-1)^k a_k$ *y* $\Sigma (a_k)^2$ *divergen.*

Solución

i)
$$(1 + a_{2n})(1 - a_{2n+1}) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n + \frac{1}{2}} + 1}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n + \frac{1}{2}} + 1} - \frac{1}{\sqrt{n}\left\{\sqrt{n + \frac{1}{2}} + 1\right\}}$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{n + \frac{1}{2}} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\left\{\sqrt{n + \frac{1}{2}} + 1\right\}}.$$

$$= 1 + \frac{(1/2)}{\sqrt{n}\,\{\sqrt{n+\frac{1}{2}}+1\}\{\sqrt{n+\frac{1}{2}}+\sqrt{n}\}} = 1 + O(1/n^{3/2})$$

entonces el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_{2n})(1 - a_{2n+1})$$

converge, como $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *se tiene que el producto infinito*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \{1 + (-1)^n a_n\} \quad \text{converge.}$$

ii) La divergencia de la serie $\Sigma (a_n)^2$ *es evidente.*

iii) $$a_{2n} - a_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{n+\frac{1}{2}} - \sqrt{n} + 1}{\sqrt{n}\{\sqrt{n+\frac{1}{2}}+1\}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}\{\sqrt{n+\frac{1}{2}}+1\}} + \frac{(1/2)}{\sqrt{n}\{\sqrt{n+\frac{1}{2}}+1\}\{\sqrt{n+\frac{1}{2}}+\sqrt{n}\}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}\{\sqrt{n+\frac{1}{2}}+1\}} + O(1/n^{3/2}),$$

pero como $\Sigma \frac{1}{\sqrt{n}\{\sqrt{n+\frac{1}{2}}+1\}} = +\infty$ *y* $\Sigma\, O(1/n^{3/2})$ *converge, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} - a_{2n+1})$ *diverge a* $+\infty$, *o sea que* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *diverge a* $+\infty$. ■

EJERCICIO 179

Sea $\{a_n\}$ *una sucesión tal que*

$$a_n \geq 0, \quad \frac{a_{2n+2}}{1 + a_{2n+2}} < a_{2n+1} < \frac{a_{2n}}{1 + a_{2n}} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \quad (15)$$

Demostrar que el producto $\prod_{k=1}^{\infty} \{1 + (-1)^k a_k\}$ *converge si la serie* $\Sigma (-1)^k a_k$ *converge, y que la serie converge ó diverge a* $+\infty$ *si el*

producto infinito converge.

Solución

(i) Tenemos:

$$1 - \frac{a_{2n+2}}{1 + a_{2n+2}} > 1 - a_{2n+1} > 1 - \frac{a_{2n}}{1 + a_{2n}},$$

o sea

$$\frac{1}{1 + a_{2n+2}} > 1 - a_{2n+1} > \frac{1}{1 + a_{2n}}. \qquad (16)$$

Entonces:

$$P_{2n} = \prod_{k=1}^{2n} \{1 + (-1)^k a_k\} = P_{2n-2} \times (1 - a_{2n-1})(1 + a_{2n}) < P_{2n-2}$$

esto es, la sucesión $\{P_{2n}\}$ *es decreciente y positiva, entonces existe el límite:*

$$\lim_{n\to\infty} P_{2n} = c.$$

Por otra parte,

$$P_{2n-1} = \prod_{k=1}^{2n-1} \{1 + (-1)^k a_k\} = (1 + a_{2n-2})(1 - a_{2n-1}) P_{2n-3} > P_{2n-3},$$

entonces la sucesión $\{P_{2n-1}\}$ *es creciente, sea*

$$\lim_{n\to\infty} P_{2n-1} = c' \ (\neq 0).$$

Si la serie $\sum (-1)^k a_k$ *converge, entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *luego:*

$$\lim_{n\to\infty} P_{2n} = \lim_{n\to\infty} P_{2n-1}(1 + a_{2n}) = \lim_{n\to\infty} P_{2n-1}$$

o sea que

$$\prod_{k=1}^{\infty} \{1 + (-1)^k a_k\} = c = c' \neq 0.$$

(ii) Supongamos ahora que el producto $\prod_{k=1}^{\infty} \{1 + (-1)^k a_k\}$ *converge, se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Sea

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$$

entonces

$$S_{2n+1} - S_{2n-1} = -a_{2n+1} + a_{2n} > a_{2n} a_{2n+1} > 0 \quad (\text{de } (16)),$$

luego , la sucesión $\{S_{2n-1}\}$ *es creciente , entonces*

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = d \quad (d \text{ puede ser } +\infty)$$

Pero como $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *, se tiene :*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = d \ . \quad \blacksquare$$

NOTA

Sean $a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $a_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}+1}$

entonces :

$$\frac{a_{2n}}{1+a_{2n}} = \frac{1}{\sqrt{n}+1} \ , \qquad \frac{a_{2n+2}}{1+a_{2n+2}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} \ ,$$

por lo tanto se cumple la desigualdad (15) :

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+1} < \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}+1} < \frac{1}{\sqrt{n}+1} \ .$$

Del ejercicio 178 el producto infinito $\prod_{k=2}^{\infty}\{1+(-1)^k a_k\}$ *converge .*

Por otra parte :

$$a_{2n} \cdot a_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}\{\sqrt{n+\frac{1}{2}}+1\}}[\sqrt{n+\tfrac{1}{2}}-\sqrt{n}+1] > \frac{1}{\sqrt{n}\{\sqrt{n+\frac{1}{2}}+1\}}$$

$$> \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}\{\sqrt{n+\frac{1}{2}}+\sqrt{n+\frac{1}{2}}\}} = \tfrac{1}{2}\ \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n} \cdot a_{2n+1}) = +\infty \ . \ \blacksquare$$

EJERCICIO 180

Sean $a_1 = 0$, $a_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}+1}$, $a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$,

investigar la convergencia o divergencia de :

(i) $\prod_{k=1}^{\infty} \{1 + (-1)^k a_k\}$ (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ (iii) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k)^2$

Sugerencia

(i) $(1 + a_{2n})(1 - a_{2n+1}) = (1 + \frac{1}{\sqrt{n}})(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}) = 1$,

el producto infinito converge a 1.

(ii) $\Sigma (-1)^k a_k = +\infty$. (iii) $\Sigma (a_k)^2 = +\infty$. ●

EJERCICIO 181

Sean

$$a_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad , \quad a_{2n-2} = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

investigar la convergencia o divergencia de :

(i) $\prod_{k=1}^{\infty} \{1 + (-1)^k a_k\}$ (ii) $\Sigma (-1)^k a_k$ (iii) $\Sigma (a_k)^2$.

Sugerencia

(i) $\prod_{k=2}^{n} (1 - a_{2k-1})(1 + a_{2k-2}) = n$, el producto diverge a $+\infty$.

(ii) $\sum_{k=2}^{n} (-a_{2k-1} + a_{2k-2}) = 2 \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} \to +\infty$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 = +\infty$

EJERCICIO 182

Demostrar que las dos series Σa_n $(a_n > 0)$ y $\Sigma a_n / S_n$ convergen o divergen simultáneamente, donde $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Solución

$$\prod_{n=2}^{\infty} (1 - \frac{a_n}{S_n}) = \prod_{n=2}^{\infty} \frac{S_{n-1}}{S_n} = \frac{S_1}{\lim_{n\to\infty} S_n}$$

entonces $\lim_{n\to\infty} S_n < +\infty$ si y sólo si el producto infinito converge, sea que la serie $\Sigma a_n / S_n$ converge. ■

EJERCICIO 183

Sea p_n el n-ésimo primo , si $s > 1$ demostrar :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - p_k^{-s}} \right).$$

Solución

$$Sea \quad P_m = \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{1 - p_k^{-s}} \right).$$

Como

$$\frac{1}{1 - p_k^{-s}} = 1 + p_k^{-s} + (p_k^{-s})^2 + \ldots + (p_k^{-s})^l + \ldots .$$

entonces :

$$P_m = \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{1 - p_k^{-s}} \right) = \prod_{k=1}^{m} [\, 1 + p_k^{-s} + (p_k^{-s})^2 + \ldots \,]$$

$$= \sum_{N_1, \ldots, N_m = o}^{\infty} (p_1^{-s})^{N_1} (p_2^{-s})^{N_2} \ldots (p_m^{-s})^{N_m}$$

$$\sum_{N_1, \ldots, N_m = o}^{\infty} \frac{1}{[\, p_1^{N_1} p_2^{N_2} \ldots p_m^{N_m} \,]^s} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

o sea

$$P_m \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} .$$

Pero tenemos evidentemente que

$$P_m = \sum_{N_1, \ldots N_m = o}^{\infty} \frac{1}{[\, p_1^{N_1} \ldots p_m^{N_m} \,]^s} \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^s}$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^s} \leq P_m \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} ,$$

por lo tanto se tiene :

$$\lim_{m \to \infty} P_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

■

CAPITULO V

SUCESION DE FUNCIONES

§ 27 Límite de una sucesión de funciones

Una famila contable ordenada de funciones $\{f_n\}$, donde f_n es una función definida en un dominio común D para todo n, se llama sucesión de funciones. Para cada punto x del dominio común D, $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de números, luego podemos pensar en la convergencia o divergencia de la sucesión numérica $\{f_n(x)\}$. Si para *TODO* $x \in D$ la sucesión numérica $\{f_n(x)\}$ converge, se dice que la sucesión de función $\{f_n\}$ converge *puntualmente* (ó converge) en D. El límite de $\{f_n(x)\}$ depende evidentemente de cada punto $x \in D$, o sea que el límite de $\{f_n(x)\}$ es una *FUNCION* de x, digamos f. f se llama *FUNCION LIMITE* de la sucesión $\{f_n\}$ y se nota :

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \quad , \qquad (1)$$

esto es :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \text{para todo } x \in D.$$

EJEMPLO 66 (Figura 41)

Sea

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

$\{f_n\}$ *es una sucesión de funciones definida en* $[0, 1]$. *Por definición,*

$$f_n(0) = 1 \to 1 \quad (n\to\infty).$$

Si $x \in (0, 1]$, *existe* N *tal que* $\frac{1}{N} < x$, *entonces para todo* $n \geq N$ *se tiene que* $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < x$, *luego* $f_n(x) = 0$ *ya que* $x \in [\frac{1}{n}, 1]$, *esto es :*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \ .$$

O sea que la función límite f *es:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x = 0 \\ 0 & si \quad x \neq 0 \ . \end{cases}$$

En la figura 41 (i), se muestra cómo se comporta la sucesión de funciones $\{f_n\}$ *y la sucesión numérica* $\{f_n(x)\}$ *para un* $x \neq 0$.

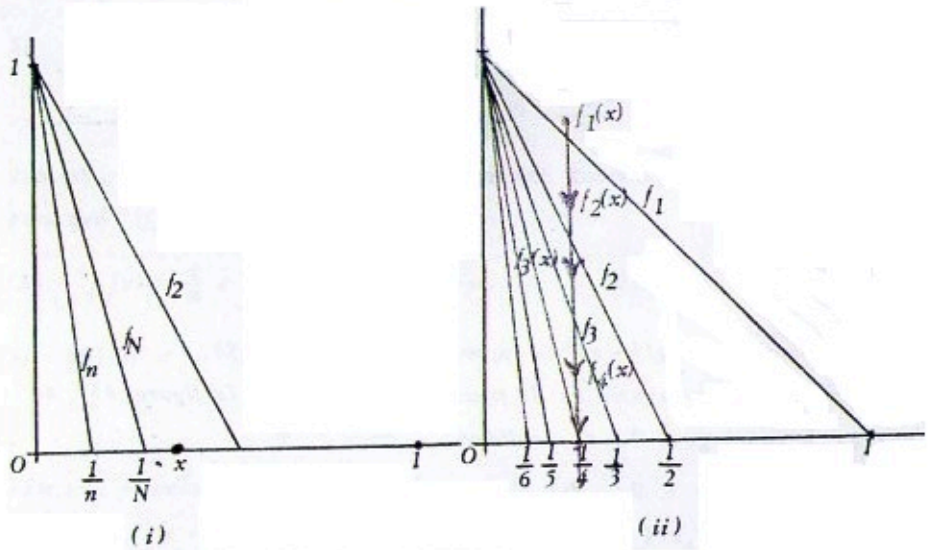


FIG. 41

EJEMPLO 67

Sea $f_n(x) = \frac{1}{n} x \ , \quad x \in R^1 = (-\infty, \infty)$ *(Fig. 42).*

$\{f_n\}$ *es una sucesión de funciones definida en* $R^1 = (-\infty, \infty)$, *es evidente que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0 \quad (\text{para todo } x) \ .$$

La función límite, f, *es la función nula:*

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \text{donde} \quad f(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in (-\infty, \infty) \ .$$

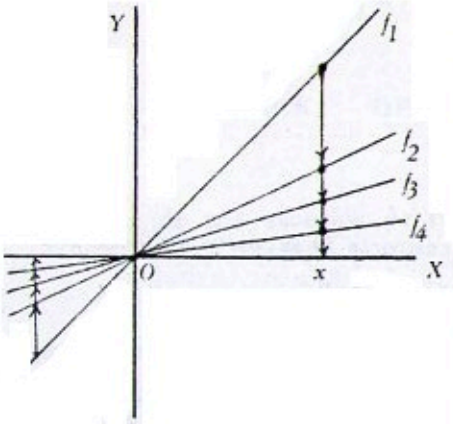


FIG. 42

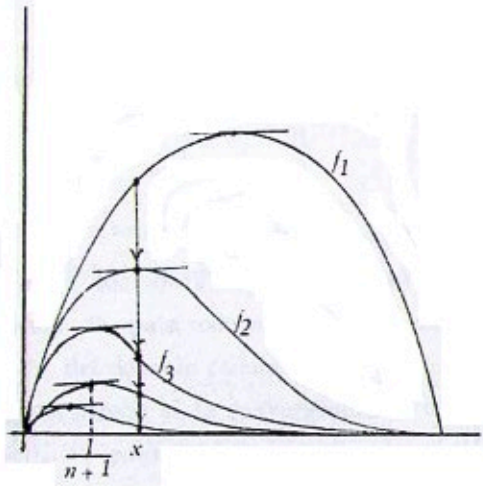


FIG. 43

EJEMPLO 68

Sea $f_n(x) = x(1-x)^n$, $x \in [0, 1]$ (Fig. 43).

La gráfica de f_n se muestra en la figura 43 # Nota. De la figura 43 se ve que $\{f_n\}$ converge a 0, en realidad:

$$f_n(0) = 0 \to 0,$$

si $x \neq 0$, $f_n(x) = x(1-x)^n \to 0$ $(n \to \infty)$ ya que $0 \leq 1-x < 1$, o sea que para todo $x \in [0, 1]$ se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Nota

$$f_n'(x) = (1-x)^{n-1}\{1-(n+1)x\},$$

de donde $f_n(x)$ tiene un máximo en $x = \frac{1}{n+1}$, y el valor máximo es:

$$f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left\{1 - \frac{1}{n+1}\right\}^n \to 0 \quad (n\to\infty). \blacksquare$$

§ 28 Convergencia uniforme

Sea f_n una sucesión de funciones que converge a f en D, en-

tonces para cada $x \in D$ se tiene que $f_n(x) \to f(x)$, o sea, dado $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$n \geq N \qquad \text{implica} \qquad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon . \tag{2}$$

El número N depende evidentemente de ϵ y del punto dado $x \in D$, por ejemplo :

(i) $$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & en \quad (0, \frac{1}{n}] \\ 0 & en \quad [\frac{1}{n}, 1] \end{cases} \to 0 \quad (n \to \infty), \quad (Ejemplo\ 66)$$

Si $|f_n(x)| < \epsilon$ *entonces se tiene :*

$$1 - nx < \epsilon , \ \acute{o} , \quad n > \frac{1 - \epsilon}{x} ,$$

esto es, el valor de n aumenta infinitamente cuando x se acerca al origen *para que* $|f_n(x)|$ *sea menor que* ϵ. ●

(ii) $f_n(x) = \frac{1}{n} x$, $x \in R^1 = (-\infty, \infty)$. *(Ejemplo 67)*

Si $|f_n(x)| < \epsilon$ *se tiene que* $\frac{1}{n} |x| < \epsilon$, *ó*

$$n > \frac{|x|}{\epsilon} ,$$

esto es, el valor de n depende de x y de ϵ.●

(iii) $f_n(x) = x(1 - x)^n \to 0 \ (n \to \infty)$. *(Ejemplo 68)*

Sabemos que el valor máximo *de* $|f_n(x)|$ *en* $[0, 1]$ *es :*

$$f_n(\frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1} |1 - \frac{1}{n+1}|^n < \frac{1}{n+1} ,$$

para $\epsilon > 0$ *dado si escogemos* n *tal que* $\frac{1}{n+1} < \epsilon$ *entonces se tiene :*

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} |1 - \frac{1}{n+1}|^n < \frac{1}{n+1} < \epsilon \quad \text{para todo } x \in [0, 1] .$$

O sea que existe n, independiente de x, *para que* $|f_n(x)|$ *sea menor que* ϵ. *(Naturalmente,* n *depende de* ϵ.) ●

Como en el caso del ejemplo (iii) si existe N, independiente de

$x \in D$ (*que depende únicamente de* ϵ) que satisface la condición (2) entonces se dice que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en D. La desigualdad en (2) puede escribirse como:

$$f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon , \qquad (3)$$

esto es, la gráfica de f_n (para todo $n \geq N$) debe estar en la franja comprendida entre las gráficas de $f + \epsilon$ y $f - \epsilon$. En la figura 45 se muestran los ejemplos (i), (ii), y (iii) anteriormente citados, en (i) y (iii) una parte de

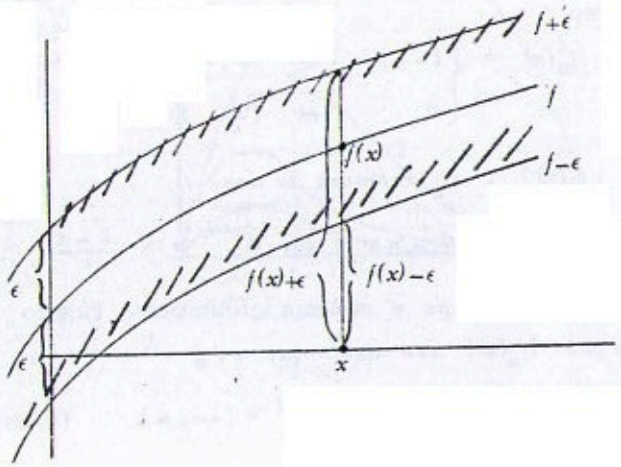


FIG. 44

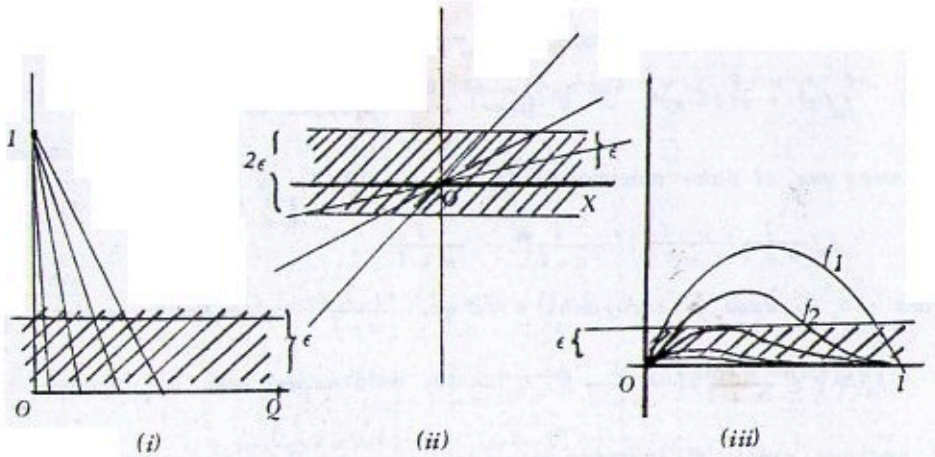


FIG. 45

la gráfica de f_n siempre sale *fuera de la franja subrayada* aunque n sea

muy grande , en cambio en (iii) la totalidad de la gráfica de f_n está contenida en la franja subrayada si n es suficientemente grande .

EJEMPLO 69

Sea $f_n(x) = n\,x(1-x)^n$ *en* $[0, 1]$. *(Fig 46)*

Si $x = 0$, $f_n(0) = 0 \to 0$ $(n\to\infty)$, *si* $x \in (0, 1]$ *se tiene que*

$$n(1-x)^n \to 0 \quad (n\to\infty)$$

ya que $0 \leqslant 1-x < 1$. *Entonces :*

$$f_n(x) \to 0 \quad (n\to\infty) \qquad \text{para todo } x \in [0, 1].$$

En la figura 46 se muestra la gráfica de f_n , $f_n(x)$ $(\geqslant 0)$ *toma su único máximo en* $x = \dfrac{1}{n+1}$, *y el valor máximo es*

$$f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}\left\{1 - \frac{1}{n+1}\right\}^n .$$

* * * * * * * * *

$$f_n(x) = nx(1-x)^n ,$$

$$f_n'(x) = n(1-x)^{n-1}\{1-(n+1)x\},$$

$$f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}\left\{1-\frac{1}{n+1}\right\}^n$$

$$\to e \quad (n\to\infty)$$

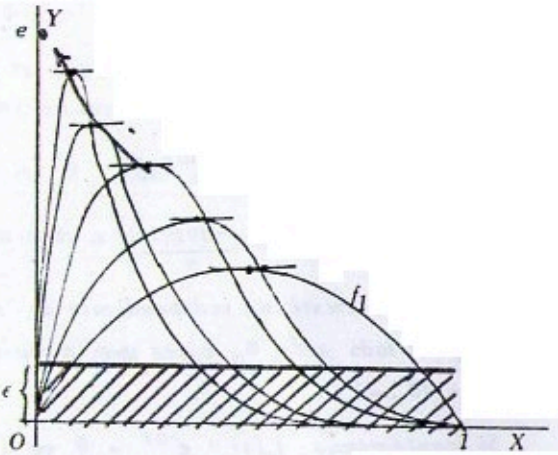


FIG. 46

Como $\left\{1-\dfrac{1}{n+1}\right\}^n \to e$ *cuando* $n\to\infty$ *entonces* $f_n\left(\dfrac{1}{n+1}\right) \to e$ $(n\to\infty)$.

Si $\epsilon < 1$ *siempre existe la parte de la gráfica de* f_n *que está fuera de la franja subrayada :* $0 \leqslant y < \epsilon$. *Entonces la convergencia* $f_n \to 0$ *NO ES UNIFORME .*

EJEMPLO 70 (FIG 47)

Sea $f_n(x) = e^{-nx}$ en $(0, \infty)$,

evidentemente:

$$f_n(x) = e^{-nx} \to 0 \quad (n \to \infty) \quad \text{para todo } x > 0.$$

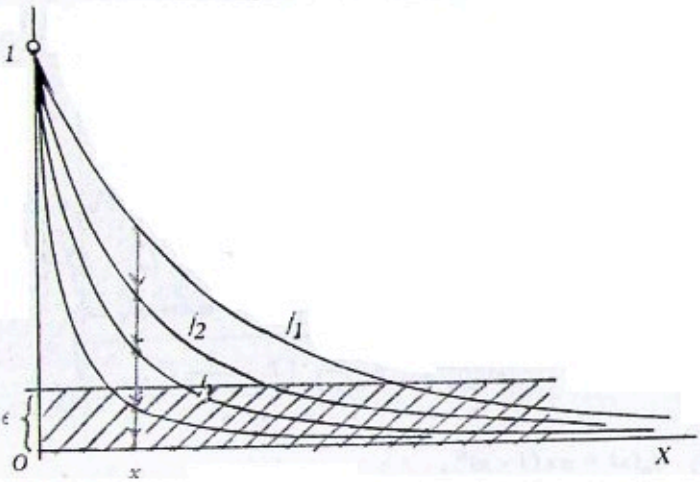


FIG. 47

De la figura 47 se ve inmediatamente que la convergencia

$f_n \to 0$

no es uniforme en $(0, \infty)$, en realidad, si

$|f_n(x)| < \epsilon$

se tiene

$e^{-nx} < \epsilon$,

o sea,

$$-nx < \log \epsilon,$$

entonces:

$$n > \frac{-\log \epsilon}{x}.$$

Por lo tanto no existe n, independiente de x, tal que $|f_n(x)|$ sea menor que ϵ para todo $x > 0$, o sea que la convergencia $f_n \to 0$ no es uniforme en $(0, \infty)$.

Si consideramos $f_n(x) = e^{-nx} \to 0$ en $[1, \infty)$, la convergencia es UNIFORME ya que para $\epsilon > 0$ dado escogemos N tal que

$$N > -\log \epsilon = \log (1/\epsilon),$$

entonces para cualquier $n \geq N$ y para todo $x \in [1, \infty)$ tenemos:

$$n \geq N > -\log \epsilon = \frac{-\log \epsilon}{x} \quad (\text{nótese que } \frac{1}{x} < 1),$$

o sea:

$$e^{-nx} = f_n(x) < \epsilon \qquad (\text{para todo } x \in [1, \infty).)$$

■

Este ejemplo nos ilustra sobre como la uniformidad de la convergencia depende del dominio.

EJERCICIO 184

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones que converge a cero en D. Sea $M_n = \sup_{x \in D} |f_n(x)|$, demostrar que $f_n \to 0$ uniformemente en D si y sólo si $\lim_{n \to \infty} M_n = 0$.

Solución

(i) Si $\lim_{n \to \infty} M_n = 0$, dado $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$M_n < \epsilon \qquad \text{para todo } n \geq N,$$

entonces

$$|f_n(x)| \leq M_n < \epsilon \qquad \begin{pmatrix} \text{para todo } x \in D \text{ y} \\ \text{para todo } n \geq N \end{pmatrix},$$

esto es:

$$f_n \to 0 \qquad \text{uniformemente en } D.$$

(ii) Si $f_n \to 0$ uniformemente en D, dado $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$|f_n(x)| < \epsilon \qquad \text{para todo } n \geq N \text{ y todo } x \in D.$$

Por lo tanto se tiene:

$$M_n = \sup_{x \in D} |f_n(x)| \leq \epsilon \qquad \text{para todo } n \geq N,$$

esto es,

$$\lim_{n \to \infty} M_n = 0. \quad ■$$

TEOREMA 25

Suponemos que $f_n \to f$ uniformemente en D. Si f_n es continua en $c \in D$ para todo n, entonces la función límite f es continua en c.

Demostración

Dado $\epsilon > 0$ *existe* N *tal que*

$$|f_N(x) - f(x)| < \epsilon/3 \qquad \text{para todo } x \in D. \tag{4}$$

Como f_N *es continua en* c, *existe* δ *tal que*

$$|x - c| < \delta \quad \text{implica} \quad |f_N(x) - f_N(c)| < \epsilon/3. \tag{5}$$

Por lo tanto, si $|x - c| < \delta$ *tenemos :*

$$|f(x) - f(c)| = |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(c) + f_N(c) - f(c)|$$

$$\leq \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{\wedge} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(c)|}_{\wedge} + \underbrace{|f_N(c) - f(c)|}_{\wedge} < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

$\epsilon/3$ *(de (4))* $\quad$ $\epsilon/3$ *(de (5))* $\quad$ $\epsilon/3$ *(de (4))*

■

Nótese que el teorema 25 puede expresarse como :

$$\lim_{x \to c} \underbrace{\lim_{n \to \infty} f_n(x)}_{f(x)} = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\lim_{x \to c} f_n(x)}_{f_n(c)}$$

$\{$ *continuidad de* f_n $\}$

$\left[\begin{matrix} \text{convergencia} \\ \text{uniforme de la} \\ \text{sucesión} \end{matrix}\right]$

o sea que los dos límites : $\lim_{n \to \infty}$ y $\lim_{x \to c}$ son intercambiables .

EJEMPLO 71

(i) $f_n(x) = 1 - nx$ *en* $[0, \frac{1}{n}]$, $f_n(x) = 0$ *en* $[\frac{1}{n}, 0]$ *(Ejemplo 66)*

$f_n \to f$ *donde* $f(x) = 0$ *si* $x \neq 0$, $f(0) = 1$ *NO ES UNIFORME en* $[0, 1]$ *ya que la función límite* f *es discontinua en 0 a pesar de que* f_n *es continua en 0 para todo* n.

(ii)

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}} \quad , \quad x \in R^1 = (-\infty, \infty). \text{ (FIG 48)}$$

Si $|x| > 1$ *entonces*

$$\frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}} = \frac{1}{x^{-2n} + 1} \to 1 .$$

Si $|x| < 1$ *entonces* $\dfrac{x^{2n}}{1 + x^{2n}} \to 0$.

Si $x = \pm 1$ *entonces* $f_n(\pm 1) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} \to \dfrac{1}{2}$.

Por lo tanto, la función límite f *es:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad |x| < 1 \\ 1/2 & si \quad x = \pm 1 \\ 1 & si \quad |x| > 1 . \end{cases}$$

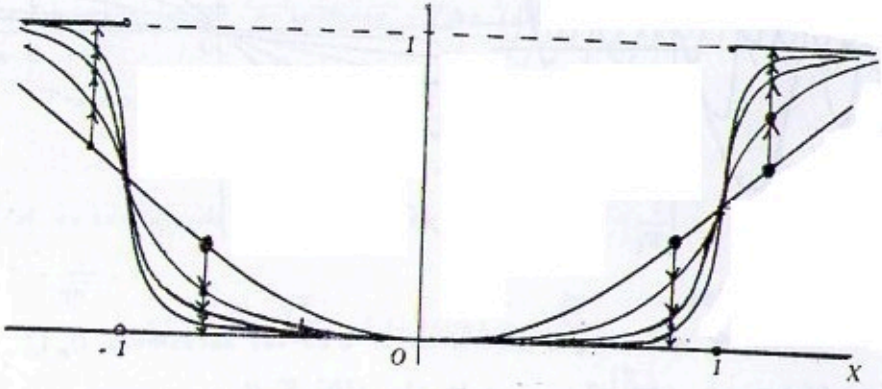


FIG. 48

La convergencia $f_n \to f$ *NO es uniforme ya que la función límite* f *no es continua en* ± 1 *mientras que* f_n *sí es continua en* ± 1 . ■

EJERCICIO 185

Investigar si convergen uniformemente o no las sucesiones $\{f_n\}$:

(i) $f_n(x) = \dfrac{sen\ nx}{\sqrt{n}}$, $x \in R^1 = (-\infty, \infty)$. *(FIG 49 i)*

(ii) $f_n(x) = \dfrac{1}{n} x$, $x \in [-M, M]$ (M *es una constante* > 0). *(FIG 49 ii)*

Solución

(i) $|f_n(x)| = \dfrac{|sen\ nx|}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ *(para todo* $x \in R^1$ *).*

Como $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ $(n \to \infty)$, *entonces* $f_n \to 0$ *uniformemente en* R^1 .

(ii) $|f_n(x)| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{M}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$,

entonces $f_n \to 0$ uniformemente en $[-M, M]$.

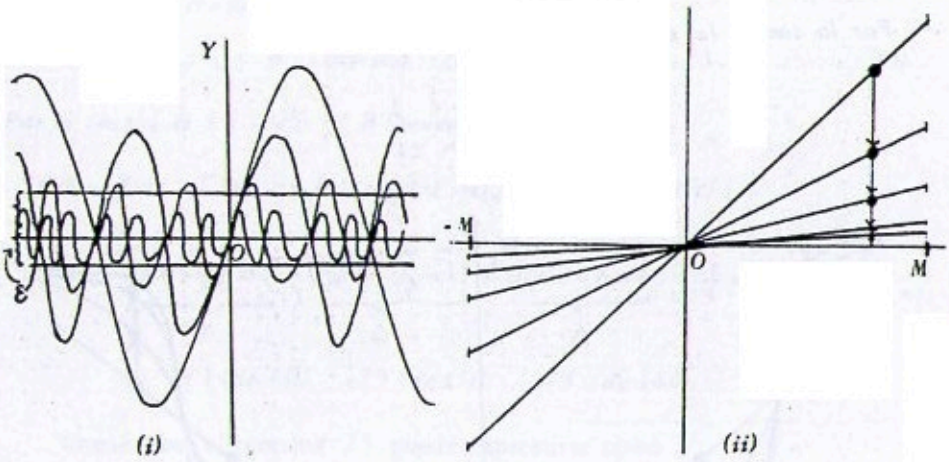


FIG. 49

EJERCICIO 186

Investigar si convergen uniformemente o no las sucesiones $\{f_n\}$:

(i) $f_n(x) = n^2 x (1-x)^n$, $x \in [0, 1]$. (FIG 50 i)

(ii) $f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx^2}$, $x \in R^1$. (FIG 50 ii)

Solución

(i) $f_n(0) = 0 \to 0$.

Si $x \in (0, 1]$, $n^2(1-x)^n \to 0 \ (n \to \infty)$ ya que $0 \leq 1 - x < 1$,

entonces la función límite es $f(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$.

Tenemos :

$$f_n'(x) = n^2(1-x)^{n-1}\{1 - (n+1)x\} ,$$

entonces $f_n(x)$ toma su valor máximo en $x = \frac{1}{n+1}$, y el valor máximo es:

$$f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n^2}{n+1}\left\{1 - \frac{1}{n+1}\right\}^n .$$

Como $f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) \to +\infty \ (n \to \infty)$, la convergencia no es uniforme en $[0, 1]$.

(ver Fig. 50 (i)).

(ii) $f_n(x) = \dfrac{x}{\frac{1}{n} + x^2} \underset{(n\to\infty)}{\to} \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x}$ *si* $x \neq 0$,

$f_n(0) = 0 \to 0$,

entonces la función límite f *es :*

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

La convergencia NO es uniforme ya que la función límite no es continua en 0 .

Tenemos :

$$f_n'(x) = \frac{n(1 - nx^2)}{(1 + nx^2)^2} ,$$

$f_n(x)$ *es una función impar, tiene un máximo en* $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ *y un mínimo en* $x = -\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, *y*

$$f_n(1/\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}}{2} , \quad f_n(-1/\sqrt{n}) = -\frac{\sqrt{n}}{2} .$$ *(Fig. 50 (ii))*

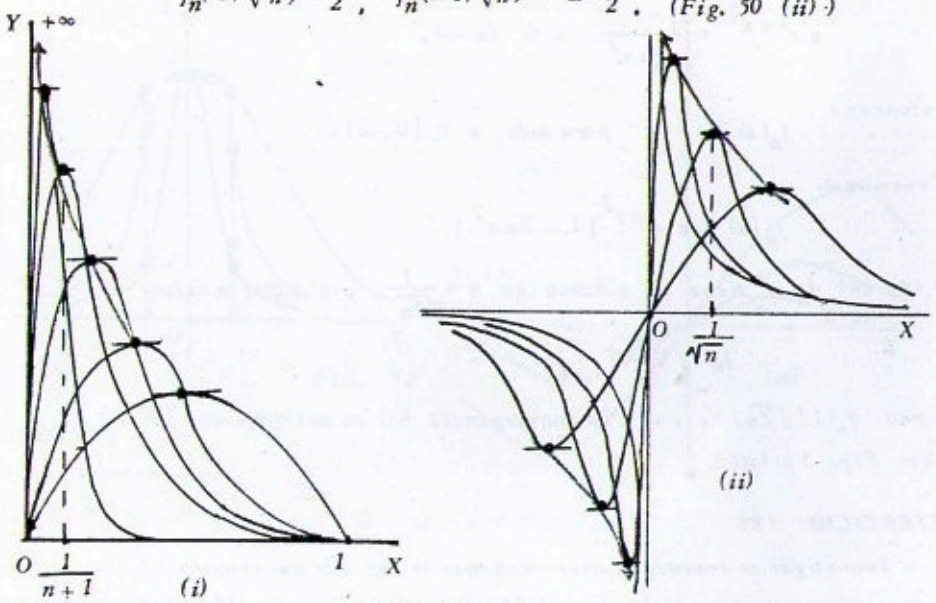


FIG. 50

Nótese que en ambos casos el valor máximo de $|f_n(x)|$ *diverge a* $+\infty$. ■

EJERCICIO 187

Investigar si convergen uniformemente o no las sucesiones $\{f_n\}$:

(i) $f_n(x) = \dfrac{1}{x+n}$ *en* $[0, \infty)$. *(FIG 51 i)*

(ii) $f_n(x) = n x e^{-nx^2}$ *en* $[0, \infty)$. *(FIG 51 ii)*

Solución

(i) *Evidentemente*

$$f_n(x) = \frac{1}{x+n} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0 \quad \text{para todo } x \geq 0.$$

Tenemos :

$$|f_n(x)| = \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n} \quad \left(\frac{1}{n} \to 0\right),$$

entonces la convergencia es uniforme en $[0, \infty)$.

(ii) $f_n(0) = 0 \to 0$.

Si $x \neq 0$ *se tiene :*

$$n e^{-nx^2} = \frac{n}{e^{nx^2}} \to 0 \quad (n\to\infty),$$

entonces :

$$f_n(x) \to 0 \quad \text{para todo } x \in [0, \infty).$$

Tenemos :

$$f_n'(x) = n e^{-nx^2}\{1 - 2nx^2\},$$

o sea que $f_n(x)$ *tiene un máximo en* $x = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$, *y el valor máximo es :*

$$f_n(1/\sqrt{2n}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}}.$$

Como $f_n(1/\sqrt{2n}) \to +\infty$, *la convergencia NO es uniforme en* $[0, \infty)$. *(Ver Fig. 51 (ii)).* ■

EJERCICIO 188

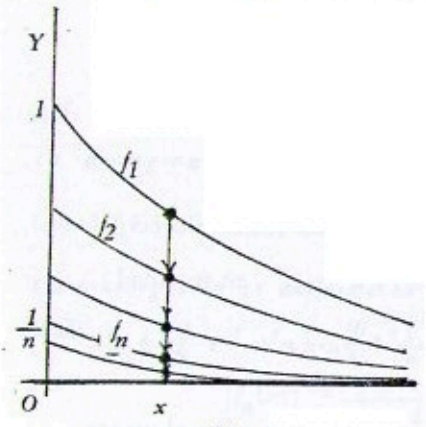
Investigar si convergen uniformemente o no las sucesiones $\{f_n\}$:

(i) $f_n(x) \quad \dfrac{1}{1+nx^2} \quad x \in R^1 = (-\infty, \infty)$. *(FIG 52 i)*

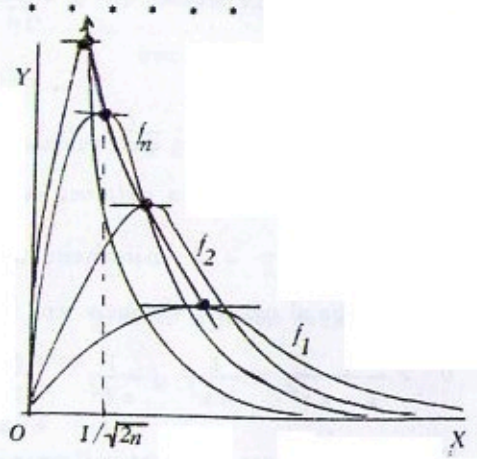
(ii) $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n x^2}$ $\quad x \in R^1$. (FIG 52 ii)

(iii) $f_n(x) = \dfrac{1}{n x + 1}$ $\quad x \in (0, 1)$ (FIG 53 i)

iv) $f_n(x) = \dfrac{x}{n x + 1}$, $x \in (0, 1)$. (FIG 53 ii)

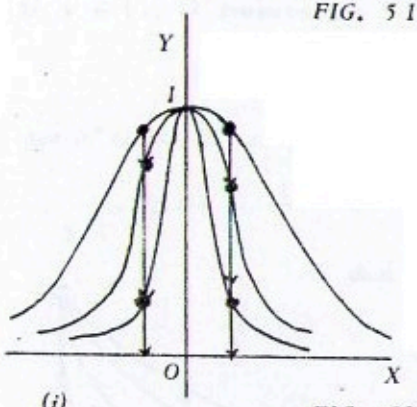


(i)

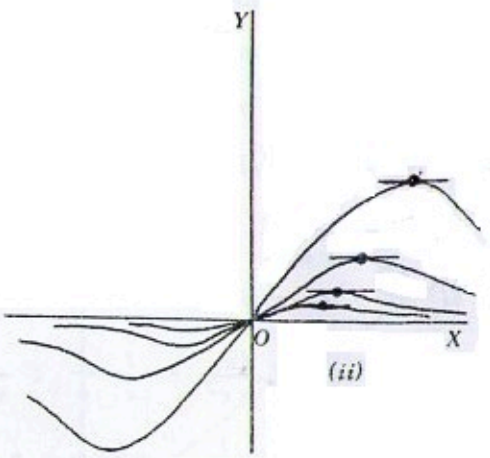


(ii)

FIG. 5 1



(i)



(ii)

FIG. 52

Solución

(i) Evidentemente :

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 . \end{cases}$$

La convergencia NO es uniforme ya que la función límite f no es continua en 0 .

(ii) $f_n(x) \to f(x) = 0$ *para todo* $x \in R^1$.

Tenemos:

$$f_n'(x) = \frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2},$$

entonces $f_n(x)$ *toma un máximo en* $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$, *un mínimo en* $x = -\frac{1}{\sqrt{n}}$, *y* $f_n(\pm 1/\sqrt{n}) = \pm\frac{1}{2\sqrt{n}}$. *Como*

$$|f_n(\pm\frac{1}{\sqrt{n}})| = \frac{1}{2\sqrt{n}} \to 0$$

entonces la convergencia es uniforme en R^1 *(Fig. 52 (ii))* ■

En (i), $\frac{1}{1 + nx^2} \to 0$ uniformemente en cualquier intervalo cerrado que no contenga al origen, digamos en $[b, \infty)$, $b > 0$, en realidad:

$$0 < \frac{1}{1 + nx^2} < \frac{1}{nx^2} \leqslant \frac{1}{nb^2} = |\frac{1}{b^2}|\frac{1}{n} \quad \text{para todo } x \geqslant b.$$

En (ii), el factor x hace uniformizar la convergencia en el origen, como veremos a continuación:

Dado $\epsilon > 0$ *partimos* R^1 *en dos conjuntos:*

$$R^1 = \{x / |x| < \epsilon\} \cup \{x / |x| \geqslant \epsilon\}.$$

[I] Si $|x| < \epsilon$ *entonces*

$$\left|\frac{x}{1 + nx^2}\right| \leqslant |x| < \epsilon \quad \text{para todo } n.$$

[II] Si $|x| \geqslant \epsilon$ *entonces*

$$\left|\frac{x}{1 + nx^2}\right| \leqslant \frac{|x|}{nx^2} = \frac{1}{|x|}\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\epsilon n},$$

por lo tanto, si $N > \frac{1}{\epsilon^2}$, *para todo* $n \geqslant N$ *se tiene:*

$$\left|\frac{x}{1+nx^2}\right| \leqslant \frac{1}{\epsilon n} \leqslant \frac{1}{\epsilon N} < \epsilon.$$

O sea que para todo $n \geqslant N$ *se obtiene:*

$$|f_n(x)| < \epsilon \quad \text{para todo } x \in R^1.$$

(iii) $f_n(x) \to 0$ *para todo* $x \in (0, 1)$.

La convergencia NO es uniforme ya que

$$\sup_{x \in (0,1)} f_n(x) = 1 \qquad \text{para todo } n .$$

En realidad, si $|f_n(x)| = \dfrac{1}{nx+1} < \epsilon$ *se tiene:*

$$n > \left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right)/x ,$$

así hay que tomar valores de n *cada vez más grandes cuando* x *se acerca al origen (Fig. 53 (i)).*

(iv) $f_n(x) \to 0$ *para todo* $x \in (0, 1)$.

La convergencia es uniforme en $(0, 1)$ *gracias al factor* x, *en realidad, dado* $\epsilon > 0$ *si* $x \in (0, \epsilon)$ *tenemos:*

$$|f_n(x)| = \frac{x}{nx+1} \leqslant x < \epsilon .$$

Si $x \in [\epsilon, 1)$ *tenemos:*

$$|f_n(x)| = \frac{x}{nx+1} < \frac{x}{nx} = \frac{1}{n} ,$$

por lo tanto, si escogemos n *tal que* $\frac{1}{n} < \epsilon$ *(ó* $n > \frac{1}{\epsilon}$*) se tiene*

$$|f_n(x)| < \frac{1}{n} < \epsilon \qquad \text{para todo } x \in (0, 1) \text{ (Fig. 53 (ii))}.$$

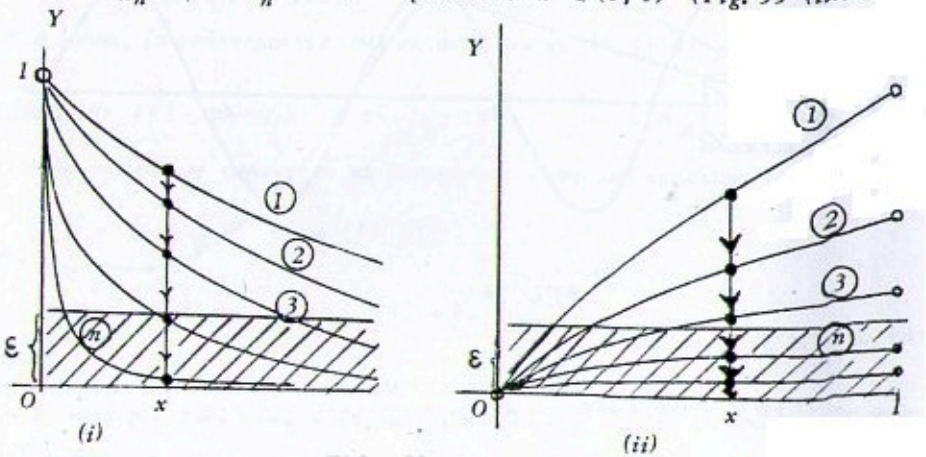


FIG. 53

EJERCICIO 189

Investigar si convergen uniformemente o no las sucesiones $\{f_n\}$:

(i) $f_n(x) = \sqrt{n}\ \operatorname{sen}\frac{x}{n}$ en $R^1 = (-\infty, \infty)$.

(ii) $f_n(x) = \sqrt{n}\ \operatorname{sen}\frac{x}{n}$ en $[-M, M]$.

Solución

Para todo $x \in R^1$ *se tiene :*

$$|f_n(x)| = \sqrt{n}\,\left|\operatorname{sen}\frac{x}{n}\right| \leq \sqrt{n}\,\frac{|x|}{n} = \frac{|x|}{\sqrt{n}} \to 0 \quad (n\to\infty) ,$$

entonces

$$f_n(x) \to f(x) = 0 \quad (\text{para todo } x) .$$

(i) *Para cualquier* n *fijo , si* $x_n = \frac{\pi}{2}n$ *se tiene :*

$$f_n(x_n) = \sqrt{n}\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}n/n\right) = \sqrt{n} \to +\infty \quad (n\to\infty) ,$$

esto nos indica que la convergencia NO es uniforme en R^1 .

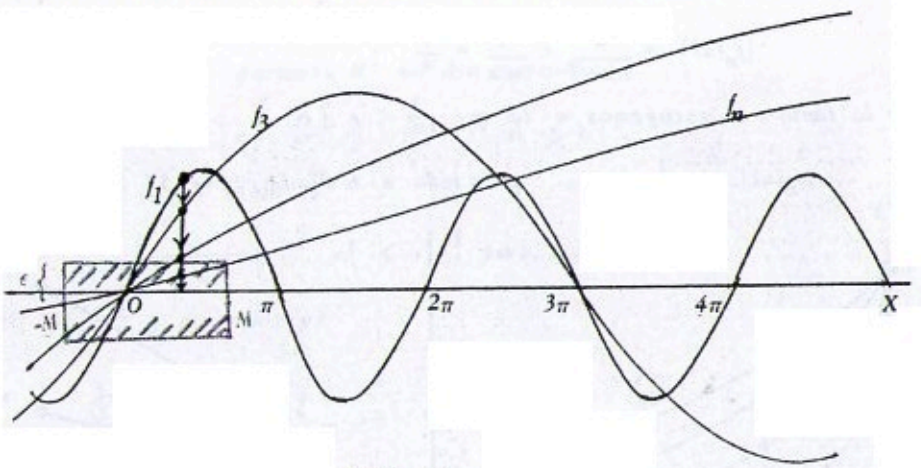


FIG. 54

(ii) *Si* $|x| \leq M$ *se tiene*

$$|f_n(x)| = \sqrt{n}\ \left|\operatorname{sen}\frac{x}{n}\right| \leq \frac{|x|}{n} \leq \frac{M}{n} .$$

Como $M/\sqrt{n} \to 0$ *entonces la convergencia es uniforme en* $[-M, M]$. (ver

Fig. 54.) ■

EJERCICIO 190

Investigar si convergen uniformemente o no las sucesiones $\{f_n\}$ *:*

(i) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^{2n}}$ *en* $[0, \infty)$.

(ii) $f_n(x) = n x (1 - x^2)^n$ *en* $[0, 1]$.

Solución

(i) $f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{2} & si \quad x = 1 \\ 0 & si \quad x > 1 \end{cases}$.

La convergencia NO es uniforme ya que la función límite f *no es continua en* $x = 1$ *(Fig. 55 (i))* .

(ii) $f_n(x) \to 0$ *para todo* $x \in [0, 1]$.

Tenemos :

$$f_n'(x) = n (1 - x^2)^{n-1} \{1 - (2n+1) x^2\} ,$$

entonces $f_n(x)$ *toma un máximo en* $x = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, *y*

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) = \frac{n}{\sqrt{2n+1}} \left[1 - \frac{1}{2n+1}\right]^n \to +\infty \ (n \to \infty) .$$

Por lo tanto, la convergencia NO es uniforme en $[0, 1]$ *(Fig. 55 (ii))*.

■

EJERCICIO 191

Investigar si convergen uniformemente o no las sucesiones $\{f_n\}$ *:*

(i) $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ *en* $[0, b]$.

(ii) $f_n(x) = \tan^{-1} nx$ *en* $[0, \infty)$.

Solución

(i) *Sabemos que para cada* x *la sucesión* $\left\{\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n\right\}$ *es creciente y tiende a* e^x . *Sea*

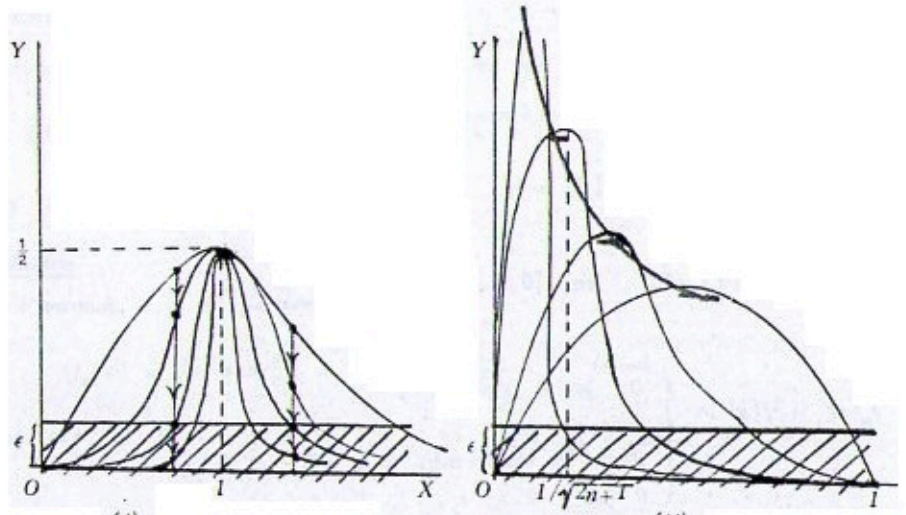


FIG. 55

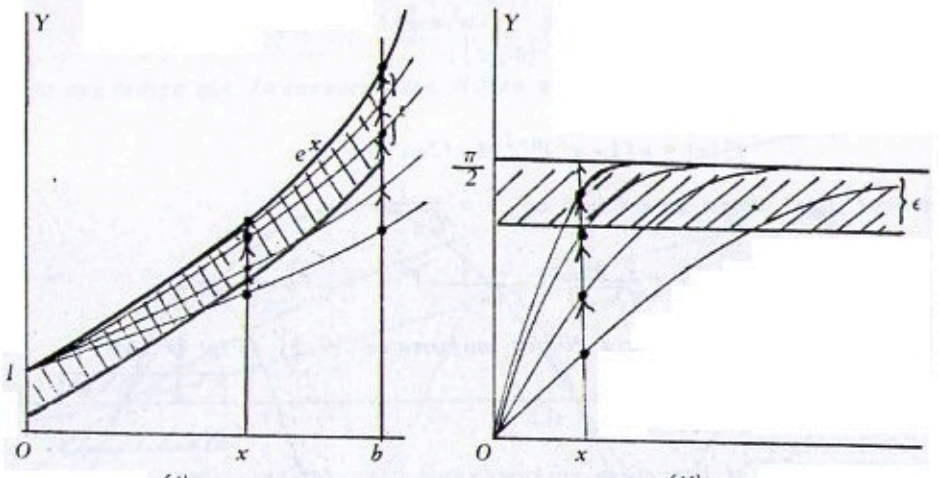


FIG. 56

$$g_n(x) = e^x - (1 + \frac{x}{n})^n$$

entonces

$$g_n'(x) = e^x - (1 + \frac{x}{n})^{n-1} \geq e^x - (1 + \frac{x}{n})^n \geq 0 ,$$

o sea que $g_n(x)$ es una función creciente, luego :

$$0 \leq g_n(x) \leq g_n(b) = e^b - (1 + \frac{b}{n})^n ,$$

esto nos indica que la convergencia es uniforme en $[0, b]$ (Fig. 56 (i)).

(ii) $f_n(0) = 0 \to 0$.

Si $x > 0$ entonces $nx \to +\infty$, luego :

$$\tan^{-1} nx \to \pi/2 .$$

Esto es :

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x = 0 \\ \frac{\pi}{2} & si \quad x > 0 . \end{cases}$$

La convergencia NO es uniforme ya que la función límite f no es continua en $x = 0$ (Fig. 56 (ii)) .

■

Dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$ definida en D , la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

es la sucesión de las sumas parciales $\{S_n\}$ donde

$$S_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n .$$

Se puede hablar de *convergencia puntual* y *convergencia uniforme* de la serie de funciones .

EJEMPLO 72

Sea $f_n(x) = x^n$ en $(-1, 1)$,

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x(1 - x^n)}{1 - x} .$$

Como $x^n \to 0$ en $(-1, 1)$ se tiene :

$$S_n(x) \to \frac{x}{1 - x} \quad puntualmente \ en \ (-1, 1) ,$$

o sea :

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1 - x} \quad puntualmente \ en \ (-1, 1) .$$

Pero , la convergencia de la serie NO es uniforme en $(-1, 1)$ como puede

verse a continuación :

Si $\left| S_n(x) - \frac{x}{1-x} \right| < \epsilon$ entonces $\frac{|x^{n+1}|}{1-x} < \epsilon$,

o sea

$$|x|^{n+1} < \epsilon(1-x) ,$$

de donde

$$(n+1) \log |x| < \log \epsilon + \log (1-x) ,$$

esto es :

$$n+1 > \frac{\log \epsilon + \log (1-x)}{\log |x|}$$

Si x se acerca a 1 ó -1 , $\log |x|$ tiende a cero , así que debemos escoger n cada vez más grande cuando x tiende a ± 1 , esto nos indica que no hay un valor de n independiente de x que haga que $\left| S_n(x) - \frac{x}{x-1} \right|$ sea menor que ϵ . *Nota

* Nota

Se puede verificar la convergencia NO uniforme también de la siguiente manera .

Dado ϵ $(0 < \epsilon < \frac{1}{2})$ si existiera algún n tal que

$$\left| S_n(x) - \frac{x}{1-x} \right| = \frac{|x^{n+1}|}{1-x} < \epsilon \quad \text{para todo } x \in (-1, 1)$$

tomando $x \to 1^-$ (x tiende a 1 por la izquierda) ó $x \to -1^+$ (x tiende a -1 por la derecha) se tendría :

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{|x^{n+1}|}{1-x} = \frac{1}{2} \leqslant \epsilon , \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{|x^{n+1}|}{1-x} = +\infty \leqslant \epsilon ,$$

lo cual es absurdo .

En esta forma , se puede observar que la dificultad está en los extremos del intervalo $(-1, 1)$.

La serie converge uniformemente en $[-d, d]$, $0 < d < 1$, ya que

$$\left| S_n(x) - \frac{x}{1-x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \leqslant \frac{d^{n+1}}{1-d} \to 0 \quad (n \to \infty) .$$

■

EJEMPLO 73

Demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$$

converge a $\frac{1}{(1-x)^2}$ *cuando* $|x| < 1$, *y a* $\frac{1}{x(1-x)^2}$ *cuando* $|x| > 1$.

Investigar si converge uniformemente o no la serie.

Solución

$$\frac{x^{n-1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} = \frac{1}{x(1-x)}\left\{\frac{1}{1-x^n} - \frac{1}{1-x^{n+1}}\right\}$$

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n-1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{x(1-x)}\left\{\frac{1}{1-x^n} - \frac{1}{1-x^{n+1}}\right\}$$

$$= \frac{1}{x(1-x)}\left\{\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{N+1}}\right\}.$$

Si $|x| < 1$ *entonces* $x^{N+1} \to 0$ $(N \to \infty)$, *luego*

$$S_N(x) \to \frac{1}{x(1-x)}\left\{\frac{1}{1-x} - 1\right\} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Si $|x| > 1$ *entonces* $|x|^{N+1} \to \infty$, *luego*

$$S_N(x) \to \frac{1}{x(1-x)^2}.$$

Entonces :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{en } |x| < 1, \\ \dfrac{1}{x(1-x)^2} & \text{en } |x| > 1. \end{cases}$$

Se puede demostrar que la convergencia no es uniforme en $|x| < 1$, *(ó en* $|x| > 1$*) por un razonamiento similar al utilizado en el ejemplo 72.* ∎

§ 29 Algunas propiedades de la convergencia uniforme

En los siguientes ejercicios se darán algunas propiedades de la convergencia uniforme de sucesiones de funciones.

EJERCICIO 192

Supongamos que $f_n \to f$ *uniformemente en* D. *Si* f_n *es acotada en* D *(para cada* n*), demostrar que existe una constante* M *tal que*

$$|f_n(x)| \leqslant M \qquad \text{para todo } n \text{ y para todo } x \in D, \tag{6}$$

y que f *es una función acotada en* D.

Si existe M que satisfaga la condición (6), se dice que $\{f_n\}$ es uniformemente acotada en D.

Demostración

Dado $\epsilon > 0$ *existe* N *tal que para todo* $n \geqslant N$ *tenemos:*

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \qquad \text{para todo } x \in D,$$

o sea:

$$|f_n(x)| < |f(x)| + \epsilon \qquad \text{para todo } x \in D. \tag{7}$$

También:

$$|f(x)| < |f_N(x)| + \epsilon \qquad \text{para todo } x \in D.$$

Sea M_o *una cota de* f_N *en* D, *entonces:*

$$|f(x)| < M_o + \epsilon \qquad (\text{para todo } x \in D),$$

o sea que f *es acotada en* D. *De (7) tenemos:*

$$|f_n(x)| < M_o + \epsilon + \epsilon = M_o + 2\epsilon \qquad (\text{para todo } x \in D).$$

Sea M_i *una cota de* f_i $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$ *en* D, *sea*

$$M = \text{Máximo } \{M_1, M_2, \ldots, M_{N-1}, M_o + 2\epsilon\}$$

M *es una COTA UNIFORME de todas las funciones* f_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ *en* D. ∎

EJEMPLO 74

$$f_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x} \qquad \text{en} \quad [0, 1).$$

Para cada n, f_n *es acotada en* $[0, 1)$, *en realidad:*

$$|f_n(x)| = \frac{1 - x^n}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} < n.$$

$f_n(x) \to \frac{1}{1 - x}$ *en* $[0, 1)$, *como la función límite no es acotada en* $[0, 1)$, *la convergencia no es uniforme.* ■

EJERCICIO 193

Si $\{f_n\}$ *y* $\{g_n\}$ *convergen uniformemente en* D, *demostrar que* $\{f_n + g_n\}$ *converge uniformemente en* D.

Demostración

$f_n \to f$, *y* $g_n \to g$ *uniformemente en* D.

Dado $\epsilon > 0$ *existe* N (*independiente de* $x \in D$) *tal que para todo* $n \geq N$ *tenemos:*

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2} \quad (\text{para todo } x \in D),$$

entonces:

$$|\{f_n(x) + g_n(x)\} - \{f(x) + g(x)\}| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

■

EJERCICIO 194

Supongamos que $f_n \to f$ *y* $g_n \to g$ *uniformemente en* D. *Si* $\{f_n\}$ *y* $\{g_n\}$ *son sucesiones de funciones acotadas, demostrar que*

$$f_n \cdot g_n \to f \cdot g \qquad \text{uniformemente en } D.$$

Demostración

Por el ejercicio 192 existe una constante M *tal que*

$$|f_n(x)| \leq M, \quad |f(x)| \leq M, \quad |g_n(x)| \leq M, \quad |g(x)| \leq M$$

(*para todo* n, *y para todo* $x \in D$)

Como $f_n \to f$ *y* $g_n \to g$ *uniformemente en* D, *dado* $\epsilon > 0$ *existe* N *tal que si* $n \geq N$ *tenemos :*

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2M} \quad , \quad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2M} \qquad \text{para todo } x \in D .$$

Entonces :

$$|f_n(x)\, g_n(x) - f(x)\, g(x)| = |f_n(x)\, g_n(x) - f(x)\, g_n(x) + f(x)\, g_n(x) - f(x)\, g(x)|$$

$$\leq |g_n(x)|\,|f_n(x) - f(x)| + |f(x)|\,|g_n(x) - g(x)|$$

$$\leq M \frac{\epsilon}{2M} + M \frac{\epsilon}{2M} = \epsilon ,$$

o sea que $f_n\, g_n \to fg$ *uniformemente en* D. ■

La acotación de las dos sucesiones $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ es condición indispensable para demostrar que $f_n g_n$ tiende a fg uniformemente, como puede verse en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 75

Sean

$$f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n} \quad , \quad g_n(x) = x + \frac{1}{n} \quad , \quad x \in (0, 1) .$$

Evidentemente tenemos que :

$$f_n \to f(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad g_n(x) \to g(x) = x \qquad \text{uniformemente en } (0, 1).$$

Tenemos :

$$f_n(x)\, g_n(x) = 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\, x + \frac{1}{n\, x} \to f(x)\, g(x) = 1 .$$

Pero,

$$|f_n(x)\, g_n(x) - f(x)\, g(x)| = \left|\frac{1}{n^2} + \frac{x}{n} + \frac{1}{n\, x}\right| > \frac{1}{n\, x} ,$$

esto es, dado $\epsilon > 0$, *aunque* n *sea muy grande existe* $x \in (0, 1)$ *tal que* $\frac{1}{n\, x} > \epsilon$ *(basta tomar* $x < \frac{1}{n\, \epsilon}$*), o sea que la convergencia* $f_n g_n \to fg$ *NO es uniforme en* $(0, 1)$. ●

En este ejemplo, la dificultad de la uniformidad de la convergencia está en $x = 0$, si consideramos un intervalo $[\delta, 1)$ $(\delta > 0)$ entonces $f_n(x)$ y $g_n(x)$ son acotadas, luego $f_n g_n \to fg$ uniformemente en $[\delta, 1)$. ■

EJEMPLO 76

Sean

$$f_n(x) = x\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad , \quad x \in R^1 = (-\infty, \infty),$$

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & si \quad x = 0 \ , \ ó \ x = irracional \\ b + \frac{1}{n} & si \quad x = racional \quad \frac{a}{b} \quad (b > 0) \ . \end{cases} \ * \underline{Nota}$$

(i) Demostrar que $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen uniformemente en cualquier intervalo acotado.

(ii) Demostrar que $\{f_n\ g_n\}$ no converge uniformemente en ningún intervalo.

Solución

(i) Si $x \in [A, B]$ entonces

$$|f_n(x) - x| = \frac{|x|}{n} \leqslant \frac{C}{n} \to 0 \quad donde \quad C = Máximo\ \{|A|, |B|\}$$

por lo tanto tenemos:

$$f_n \to x \quad uniformemente \quad en \quad [A, B].$$

Sea $$g(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x = 0 \ ó \ x = irracional \\ b & si \quad x = a/b \quad (b > 0) \end{cases} \ * \underline{Nota}$$

entonces :

$$|g_n(x) - g(x)| = \frac{1}{n} \to 0 \ ,$$

esto es,

$$g_n \to g \quad uniformemente \ en \quad R^1.$$

* * * * * *

Nota

Sea $\frac{a}{b}$ $(b > 0)$, a, b enteros, la expresión irreducible del número racional x.

(ii) Sea $b_n = f_n g_n$ entonces

$$b_n(x) = f_n(x)\, g_n(x) = \begin{cases} x(1+\frac{1}{n})\frac{1}{n} & \text{si } x = 0 \text{ ó irracional} \\ x(1+\frac{1}{n})(b+\frac{1}{n}) = a(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{nb}) & \text{si } x = \frac{a}{b} \end{cases}$$

Si $x = a/b$ (racional) tenemos :

$$b_n(a/b) - a = \frac{a}{n}(1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{nb}) ,$$

pero en cualquier intervalo $\overline{lim}\ |a| = +\infty$, luego

$$b_n(a/b) \not\to a \quad \text{NO es uniforme.} \quad \blacksquare$$

EJERCICIO 195

Supongamos que $f_n \to f$ uniformemente en D y que $\{f_n\}$ es uniformemente acotada por M. Si g es continua en $|x| \leq M$, demostrar que

$$g(f_n) \to g(f) \quad \text{uniformemente en } D .$$

Solución

Como $\{x / |x| \leq M\}$ es compacto, g es uniformemente continua, o sea que, dado $\epsilon > 0$ existe δ tal que

$$|y - z| < \delta , \ |y| \leq M , \ |z| \leq M \text{ implica } |g(y) - g(z)| < \epsilon .$$

Para este δ ya escogido, existe N (independiente de $x \in D$) tal que

$$n \geq N \text{ implica } |f_n(x) - f(x)| < \delta \quad \text{para todo } x \in D ,$$

luego :

$$|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \epsilon \quad \text{para todo } x \in D \text{ y para todo } n \geq N ,$$

o sea :

$$g \circ f_n \to g \circ f \quad \text{uniformemente en } D . \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 77

De la desigualdad conocida : *Nota

$$0 \leq t - \log(1+t) \leq t^2/2 \quad \text{para todo } t \geq 0$$

se tiene :

$$0 \leqslant \frac{x}{n} - \log\left(1+\frac{x}{n}\right) \leqslant \frac{x^2}{2n^2} \quad (x \geqslant 0) \ .$$

luego :

$$0 \leqslant x - n\log\left(1+\frac{x}{n}\right) \leqslant \frac{x^2}{2n} \ . \tag{8}$$

Entonces se tiene :

$$n\log\left(1+\frac{x}{n}\right) \to x \quad \text{uniformemente en } [0,B] \ ,$$

ya que

$$\frac{x^2}{2n} \leqslant \frac{B^2}{2n} \to 0 \quad (n\to\infty) \ .$$

Además, la sucesión $\{n\log(1+\frac{x}{n})\}$ es uniformemente acotada en $[0,B]$ (de (8) una cota uniforme es B) entonces :

$$e^{n\log\left(1+\frac{x}{n}\right)} \to e^x \quad \text{uniformemente en } [0,B] \ ,$$

o sea que

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x \quad \text{uniformemente en } [0,B] \ . \ \blacksquare$$

* Nota

Sea $f(t) = \frac{t^2}{2} - t + \log(1+t)$,

entonces

$$f(0) = 0 \ , \quad f'(t) = t - 1 + \frac{1}{1+t} = \frac{t^2}{1+t} > 0 \ ,$$

esto es ,

$$f(t) \geqslant 0 \ .$$

EJERCICIO 196

Sea $f_n \to f$ uniformemente en (a,b).

Si f_n $(n = 1,2,3,\ldots)$ es una función continua en $[a,b]$, demostrar que :

$$f_n \to f \quad \text{uniformemente en } [a,b] \ .$$

Demostración

Basta demostrar la convergencia de $\{f_n(a)\}$, $\{f_n(b)\}$.

Dado $\epsilon > 0$ existe N_o tal que

$$n \geq N_o \quad \text{implica} \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{4} \quad \text{para todo } x \in (a, b).$$

Sean n y k mayores que N_o, por la continuidad de f_n y f_k en $[a, b]$ existe $x \in (a, b)$ tal que

$$|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\epsilon}{4}, \quad |f_k(x) - f_k(a)| < \frac{\epsilon}{4},$$

luego tenemos :

$$|f_n(a) - f_k(a)| = |f_n(a) - f_n(x) + f_n(x) - f(x) + f(x) - f_k(x) + f_k(x) - f_k(a)|$$

$$\leq |f_n(a) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(a)|$$

$$< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon.$$

Esto es, la sucesión $\{f_n(a)\}$ satisface la condición de Caucby, o sea que $\{f_n(a)\}$ converge. De la misma manera, $\{f_n(b)\}$ converge. ■

EJEMPLO 78

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k \quad \text{es continua en } [-1, 1] \text{ para todo } n.$$

Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ convergiera uniformemente en $(-1, 1)$ entonces las dos series $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ y $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ deberían converger (Ejercicio 196), esto es imposible. Por lo tanto, la convergencia de la serie NO es uniforme en $(-1, 1)$. ■

EJEMPLO 79

$$f_n(x) = \frac{1}{nx + 1} \quad \text{es continua en } [0, 1] \text{ para todo } n.$$

Si $f_n \to 0$ uniformemente en $(0, 1]$ entonces $\{f_n\}$ convergería uniformemente en $[0, 1]$, luego la función límite sería continua en $[0, 1]$. Pero :

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

esto es imposible, entonces la convergencia de $\left\{\frac{1}{nx+1}\right\}$ en $(0, 1]$ no es uniforme.

■

EJERCICIO 197

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones monótonas que tiende a f puntualmente en $[a, b]$. Si f es continua en $[a, b]$, demostrar que

$$f_n \to f \quad \text{uniformemente en } [a, b].$$

Solución

Por la continuidad uniforme de f, dado $\epsilon > 0$ existe δ tal que

$$|x - y| < \delta \quad \text{implica} \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{5} \tag{9}$$

Consideremos una partición de $[a, b]$:

$$x_o = a, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n = b$$

tal que $x_k - x_{k-1} < \delta$ para todo k. Como $f_n(x_k) \to f(x_k)$ existe N_k tal que

$$n \geq N_k \quad \text{implica} \quad |f_n(x_k) - f(x_k)| < \frac{\epsilon}{5} \tag{10}$$

Sea

$$N_o = \text{Máximo } \{N_o, N_1, \ldots, N_n\}.$$

Si $x \in [a, b]$, x pertenece a $[x_{k-1}, x_k]$ para algún k, para $n \geq N_o$ tenemos :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_k)|}_{\wedge} + \underbrace{|f_n(x_k) - f(x_k)|}_{\wedge} + \underbrace{|f(x_k) - f(x)|}_{\wedge}$$

$$|f_n(x_{k-1}) - f_n(x_k)| \qquad \frac{\epsilon}{5} \text{ (por (10))} \qquad \frac{\epsilon}{5} \text{ (por (9))}$$

$$\left(\begin{matrix}\text{por la monotonía de} \\ f_n\end{matrix}\right)$$

$$< |f_n(x_{k-1}) - f_n(x_k)| + \frac{2}{5}\epsilon$$

$$\leq \frac{2}{5}\epsilon + |f_n(x_{k-1}) - f(x_{k-1})| + |f(x_{k-1}) - f(x_k)| + |f(x_k) - f_n(x_k)|$$

$$< \frac{2}{5}\epsilon + \frac{1}{5}\epsilon + \frac{1}{5}\epsilon + \frac{1}{5}\epsilon = \epsilon \quad .$$ #Nota

Esto es , $f_n \to f$ *uniformemente en* $[a, b]$.

#Nota

$$|f_n(x_{k-1}) - f(x_{k-1})| < \frac{1}{5}\epsilon \qquad \text{por (10)},$$

$$|f(x_{k-1}) - f(x_k)| < \frac{1}{5}\epsilon \qquad \text{por (9)},$$

$$|f(x_k) - f_n(x_k)| < \frac{1}{5}\epsilon \qquad \text{por (10)}.$$ ■

Nótese que en este ejercicio la sucesión $\{f_n(x)\}$ no es monótona sino que cada una de las funciones f_n es monótona (algunas pueden ser crecientes y otras pueden ser decrecientes, ver Ejemplo 81). El resultado no es válido para intervalos abiertos (ver el ejemplo 80)

EJEMPLO 80

Sea $f_n(x) = \frac{1}{nx + 1}$ *en* $(0, 1)$,

evidentemente f_n *es una función monótona (decreciente) para cada* n *y*

$f_n(x) \to 0$ *puntualmente en* $(0, 1)$,

pero la convergencia NO es uniforme en $(0,1)$ *(Ejemplo 79, Ejercicio 188 (iii))*. ■

EJEMPLO 81

Sea $f_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x + 1}{n}$ *en* $[0, 1]$,

evidentemente cada f_n *es monótona, en realidad,*

f_n *es creciente si* n *es impar,*

f_n *es decreciente si* n *es par.*

Además:

$f_n(x) \to 0$ *puntualmente en* $[0, 1]$,

Como $|f_n(x)| \leqslant \frac{2}{n}$, se tiene que $f_n \to 0$ uniformemente en $[0, 1]$.

EJEMPLO 82

Sea $\{c_n\}$ una sucesión que converge a $c > 0$, demostrar que

$$(c_n)^x \to c^x \quad \text{uniformemente en } [-M, M].$$

Solución

Como $c > 0$, supongamos que $c_n > 0$ para todo n.

$(c_n)^x$ es una función monótona (si $c_n > 1$ creciente, si $c_n < 1$ decreciente) , además c^x es una función continua en $[-M, M]$, por lo tanto

$$(c_n)^x \to c^x \quad \text{uniformemente en } [-M, M]. \blacksquare$$

EJERCICIO 198

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones monótonas que tiende a f uniformemente en $[a, b]$, demostrar que f es monótona.

Demostración

Supongamos que f no es monótona, entonces existen $x, y, z \in [a, b]$ tales que

$$x < y < z \ , \quad f(x) < f(y) \ , \quad f(y) > f(z) \tag{11}$$

ó

$$x < y < z \ , \quad f(x) > f(y) \ , \quad f(y) < f(z)$$

Supongamos que se tiene (11). Sea

$$\epsilon = \text{Mínimo } \{f(y) - f(x) \ , \ f(y) - f(z)\}$$

entonces existe N tal que

$$n \geqslant N \text{ implica } |f_n(t) - f(t)| < \epsilon/2 \text{ para todo } t \in [a, b].$$

Por lo tanto tenemos

$$f_n(y) - f_n(x) = \{f_n(y) - f(y)\} + \underbrace{\{f(y) - f(x)\}}_{\geqslant \epsilon} + \{f(x) - f_n(x)\} > 0 \ ,$$

$$f_n(y) - f_n(z) = \{f_n(y) - f(y)\} + \underbrace{\{f(y) - f(z)\}}_{\vee\!\vee\ \epsilon} + \{f(z) - f_n(z)\} > 0$$

esto es , f_n no es monótona (absurdo .). ■

EJERCICIO 199

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas en D. Si $f_n \to f$ uniformemente en D, demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$$

donde $x_n \to x$ $(n\to\infty)$, $x_n , x \in D$.

Demostración

Dado $\epsilon > 0$ existe N_1 tal que para todo $n \geq N_1$ tenemos :

$$|f_n(t) - f(t)| < \epsilon/2 \quad \text{para todo} \quad t \in D. \tag{i}$$

Como f_n es continua y $f_n \to f$ es uniforme entonces f es continua en D , o sea, existe b tal que

$$|y - x| < b \quad \text{implica} \quad |f(y) - f(x)| < \epsilon/2 \tag{ii}$$

De $x_n \to x$, existe N_2 tal que

$$n \geq N_2 \quad \text{implica} \quad |x_n - x| < b . \tag{iii}$$

Sea N_o = Máximo $\{N_1 , N_2\}$, si $n \geq N_o$ tenemos de (ii) y (iii) :

$$|f(x_n) - f(x)| < \epsilon/2 . \tag{iv}$$

En (i) tomando $t = x_n$:

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| < \epsilon/2 . \tag{v}$$

De (iv) y (v) se tiene que

$$|f_n(x_n) - f(x)| < \epsilon ,$$

o sea que $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$. ■

EJERCICIO 200

Sea $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones continuas en un conjunto* compacto D, *supongamos que*

$$f_n(x) \to f(x) \quad \textit{puntualmente en } D .$$

Demostrar que $f_n \to f$ *uniformemente en* D *si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes :*

(i) f *es continua en* D .

(ii) Dado $\epsilon > 0$ *existe* $m > 0$ *y* $\delta > 0$ *tales que*

$$|f_k(x) - f(x)| < \delta \quad \textit{implica} \quad |f_{k+n}(x) - f(x)| < \epsilon \quad \textit{para todo } n \geq m .$$

Demostración

[A] *Supongamos que* $f_n \to f$ *uniformemente en* D.

Evidentemente f *es continua en* D.

Dado $\epsilon > 0$ *existe* m *tal que para todo* $n \geq m$ *tenemos :*

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \textit{para todo } x \in D ,$$

luego :

$$|f_{n+k}(x) - f(x)| < \epsilon \quad \textit{para todo } x \in D,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

Nótese que δ puede ser cualquiera .

[B] *Supongamos que* f *satisface las dos condiciones (i) y (ii).*

Dado $\delta > 0$, $x_o \in D$ *existe* b *tal que*

$$|f_b(x_o) - f(x_o)| < \delta/3 \quad (\textit{ya que } f_n(x_o) \to f(x_o)) . \qquad (12)$$

De la continuidad de f_b *y* f *existe una vecindad de* x_o , $N(x_o)$, *tal que si* $x \in N(x_o)$ *se tiene :*

$$|f_b(x) - f_b(x_o)| < \delta/3 \ , \ |f(x) - f(x_o)| < \delta/3 . \qquad (13)$$

De (12) y (13) se tiene :

$$|f_b(x) - f(x)| < \delta \qquad \textit{si } x \in N(x_o) . \qquad (14)$$

Como $\{N(x_o)\}_{x_o \in D}$ es un recubrimiento abierto del conjunto compacto D, existe un número finito de vecindades que forman nuevamente un recubrimiento abierto de D:

$$N(x_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, p), \quad \bigcup_{j=1}^{p} N(x_j) \supset D.$$

Sean $k_1, k_2, \ldots, k_p$ los subíndices b en (12) correspondientes a los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_p$, es decir:

$$|f_{k_j}(x_j) - f(x_j)| < \delta/3 \qquad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

sea

$$N_o = \text{Máximo } \{k_1, k_2, \ldots, k_p\} + m.$$

Si $x \in D$ entonces x pertenece a alguna vecindad, digamos $x \in N(x_j)$, luego tenemos de (14):

$$|f_{k_j}(x) - f(x)| < \delta.$$

Si $n \geq N_o$ entonces $n \geq N_o \geq k_j + m$, aplicando la condición (ii) tenemos:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon. \quad \blacksquare$$

EJERCICIO 201 (Teorema de Dini)

Sea $\{f_n\}$ una sucesión monótona de funciones continuas que tiende a una función continua en un conjunto compacto D, demostrar que

$$f_n \to f \quad \text{uniformemente en } D.$$

NOTA

$\{f_n\}$ es una SUCESION CRECIENTE si

$f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para todo n, y para todo $x \in D$,

$\{f_n\}$ es una SUCESION DECRECIENTE si

$f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ para todo n, y para todo $x \in D$.

Demostración

Supongamos que, para mayor sencillez, $\{f_n\}$ es una sucesión creciente.

Como f es uniformemente continua, *dado $\epsilon > 0$ existe δ tal que*

$$|y - x| < \delta \text{ implica } |f(y) - f(x)| < \epsilon/3 \qquad (15)$$

Para cada x fijo, $f_n(x) \to f(x)$, esto es, existe M_x tal que

$$|f_{M_x}(x) - f(x)| < \epsilon/3 . \qquad (16)$$

Como f_{M_x} es continua en D, existe δ_x (escogemos δ_x menor que δ) tal que

$$|y - x| < \delta_x \quad \text{implica} \quad |f_{M_x}(y) - f_{M_x}(x)| < \epsilon/3 . \qquad (17)$$

Por la compacidad del conjunto D existe un número finito de puntos, digamos $x_1, x_2, \ldots, x_p$ tales que

$$\bigcup_{j=1}^{p} N(x_j, \delta_{x_j}) \supset D . \qquad \text{\# Nota}$$

Sea

$$N_o = \text{Máximo } \{M_1, M_2, \ldots, M_p\} \qquad (M_j = M_{x_j}) .$$

Si $x \in D$ entonces $x \in N(x_k, \delta_{x_k})$ para algún k. Si $n \geq N_o$ entonces $n \geq M_k$, luego:

$$|f_n(x) - f(x)| = f(x) - f_n(x) \leq f(x) - f_{M_k}(x)$$

$$\leq \underbrace{|f(x) - f(x_k)|}_{\wedge} + \underbrace{|f(x_k) - f_{M_k}(x_k)|}_{\wedge} + \underbrace{|f_{M_k}(x_k) - f_{M_k}(x)|}_{\wedge} < \epsilon ,$$

$$\frac{\epsilon}{3} \text{ (por (15))} \qquad \frac{\epsilon}{3} \text{ (por (16))} \qquad \frac{\epsilon}{3} \text{ (por (17))}$$

esto es, $f_n \to f$ uniformemente en D.

Nota \#

$N(x_j, \delta_{x_j})$ = *la vecindad de x_j con radio* $\delta_{x_j} = (x_j - \delta_{x_j}, x_j + \delta_{x_j})$.

Observación

El teorema de Dini es un caso especial del ejercicio 198. Si $\{f_n\}$ es una sucesión creciente, dado $\epsilon > 0$ podemos escoger : $m = 1$, $\delta = \epsilon$, luego :

$$|f_k(x) - f(x)| = f(x) - f_k(x) < \epsilon \quad \text{implica}$$

$$|f_{k+n}(x) - f(x)| = f(x) - f_{k+n}(x) \leq f(x) - f_k(x) < \epsilon . \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 83

Sea $f_n(x) = \dfrac{1}{nx + 1}$ *en* $(0, 1)$.

$\{f_n\}$ *es una sucesión decreciente, en realidad :*

$$f_n(x) = \frac{1}{nx+1} > \frac{1}{(n+1)x+1} = f_{n+1}(x) ,$$

y

$$f_n(x) \to 0 \quad \text{puntualmente en } (0,1) .$$

Además, f_n *y* f *son continuas, sin embargo* $f_n \to 0$ *NO es uniforme en* $(0, 1)$ *(Ejemplo 79, Ejercicio 188 (iii)).*

Este ejemplo nos muestra que el resultado del teorema de Dini no es válido si D no es compacto. $\blacksquare$

EJEMPLO 84

Sabemos que $\{(1 + \frac{x}{n})^n\}$ *es una sucesión creciente, y tiende a* e^x. *Además,* $(1 + \frac{x}{n})^n$ *y* e^x *son continuas, entonces tenemos :*

$$(1 + \tfrac{x}{n})^n \to e^x \quad \text{uniformemente en } [0, B] . \quad \blacksquare$$

EJERCICIO 202

Sea $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones continuas en* $[a, b]$ *que tiende puntualmente a* f. *Si dado* $\epsilon > 0$ *existe* δ *(independiente de* n*) tal que*

$$|x-y| < \delta \quad implica \quad |f_n(x)-f_n(y)| < \epsilon \quad (para\ todo\ n) \qquad (18)$$

demostrar que

$$f_n \to f \quad uniformemente\ en \quad [a,b].$$

NOTA

Si una sucesión de funciones continuas satisface la condición (18) se dice que la sucesión de funciones es *EQUICONTINUA*. El ejercicio 202 dice que una sucesión equicontinua de funciones converge uniformemente si converge puntualmente.

Demostración

Dado $\epsilon > 0$ *tomemos* $\delta > 0$ *que satisfaga la condición (18).*

Consideramos una partición del intervalo $[a,b]$:

$$a = x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n = b$$

tal que $x_k - x_{k-1} < \delta$ *para todo* k. *Como* $f_n(x_k) \to f(x_k)$, *existe* N_k *tal que*

$$n \geq N_k \qquad implica \qquad |f_n(x_k) - f(x_k)| < \epsilon .$$

Sea $N_0 = Máximo\{N_0, N_1, \ldots, N_n\}$.

Si $x \in [a,b]$ *entonces* $x \in [x_{k-1}, x_k]$ *para algún* k. *Tenemos entonces para* $n \geq N_0$:

$$|f_n(x)-f(x)| \leq \underbrace{|f_n(x)-f_n(x_k)|}_{< \epsilon \ (por\ (18))} + \underbrace{|f_n(x_k)-f(x_k)|}_{< \epsilon} + \underbrace{|f(x_k)-f(x)|}_{< \epsilon \ (por\ (18))^{\#}} < 3\epsilon ,$$

o sea que $f_n \to f$ *uniformemente en* $[a,b]$. ■

Nota # En la desigualdad (18) tomando límite cuando $n \to \infty$:

$$|f(x)-f(y)| \leq \epsilon \quad si \quad |x-y| < \delta .$$

§ 30 Condición de Caũchy

Para una sucesión numérica se ha estudiado la condición de Cauchy (Propiedad 20), de manera similar tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 26 (Condición de Cauchy)

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en D. $\{f_n\}$ converge uniformemente en D si y sólo si, dado $\epsilon > 0$ existe N, independiente de $x \in D$, tal que

$$n > N \quad implica \quad |f_n(x) - f_{n+q}(x)| < \epsilon \qquad (19)$$

para todo $x \in D$, *para todo* $q = 1, 2, 3, \ldots$.

Demostración

(i) Si $f_n \to f$ *uniformemente en* D, *dado* $\epsilon > 0$ *existe* N *tal que para todo* $n \geq N$ *tenemos:*

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/2 \qquad \text{para todo } x \in D.$$

Como $n+q \geq N$ *tenemos también:*

$$|f_{n+q}(x) - f(x)| < \epsilon/2 \qquad \text{para todo } x \in D.$$

De las dos desigualdades anteriores tenemos:

$$|f_{n+q}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+q}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(ii) Supongamos ahora la condición (19). La sucesión numérica $\{f_n(x)\}$ *satisface la condición de Cauchy para cada* x *fijo, entonces* $\{f_n(x)\}$ *converge puntualmente en* D, *sea* f *la función límite. En (19) tomando límite cuando* $q \to \infty$ *se tiene:*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \qquad \text{para todo } x \in D,$$

esto es, la convergencia $f_n \to f$ *es uniforme en* D. ∎

EJEMPLO 85

Sea $f_n(x) = \dfrac{x}{nx+1}$ *en* $[0,\infty)$.

$$f_n(x) - f_k(x) = \frac{x}{nx+1} - \frac{x}{kx+1} = \frac{x^2(k-n)}{(nx+1)(kx+1)},$$

para $k > n$ *tenemos:*

$$|f_n(x) - f_k(x)| = \frac{x^2(k-n)}{(nx+1)(kx+1)} \leqslant \frac{x^2(k-n)}{nkx^2} = \frac{k-n}{kn}$$

$$= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{n}{k}\right) < \frac{1}{n}.$$

Dado $\epsilon > 0$ *si escogemos* $N > 1/\epsilon$ *(ó* $\frac{1}{N} < \epsilon$*), para todo* $n \geqslant N$ *y todo* $k > n$ *se tiene:*

$$|f_n(x) - f_k(x)| < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N} < \epsilon,$$

por lo tanto la sucesión $\{x/(nx+1)\}$ *satisface la condición de Cauchy, o sea que la sucesión converge uniformemente.* ■

La condición de Cauchy es muy útil para comprobar la convergencia uniforme cuando no se conoce la función límite.

EJEMPLO 84 (A)

Sea $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$,

demostrar que $\{f_n\}$ *converge uniformemente en* $[0,b]$, *y que*

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$$

es una función continua, creciente.

Observación

En el ejercicio 191, en los ejemplos 77 y 84 hemos visto que:

$$(1 + \frac{x}{n})^n \to e^x \quad \textit{uniformemente en } [0,b],$$

suponiendo que *EXISTE* el límite puntual e^x y e^x es continua.

Solución

$$f_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \ldots (1 - \frac{k-1}{n}) ,$$

$$f_{n+1}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} (1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1}) \ldots (1 - \frac{k-1}{n+1}) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$$

entonces :

$$0 \leqslant f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \{ (1 - \frac{1}{n+1}) \ldots (1 - \frac{k-1}{(n+1)})$$

$$- (1 - \frac{1}{n}) \ldots (1 - \frac{k-1}{n}) \}$$

$$\leqslant \frac{b^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{b^k}{k!} [(1 - \frac{1}{n+1}) \ldots (1 - \frac{k-1}{n+1}) - (1 - \frac{1}{n}) \ldots (1 - \frac{k-1}{n})]$$

$$= f_{n+1}(b) - f_n(b) .$$

Como

$$f_{n+q} - f_n = \sum_{k=n}^{n+q-1} (f_{k+1} - f_k)$$

se tiene entonces :

$$0 \leqslant f_{n+q}(x) - f_n(x) \leqslant f_{n+q}(b) - f_n(b) . \qquad (20)$$

La sucesión numérica $\{f_n(b)\}$ *es creciente y acotada* #Nota, *entonces es convergente , o sea que* $\{f_n(b)\}$ *satisface la condición de Caucby . La desigualdad (20) nos garantiza que la sucesión de funciones* $\{f_n(x)\}$ *satisface la condición de Caucby para la convergencia uniforme en* $[0, b]$. *Como* $f_n(x)$ *es continua y creciente , su función límite es continua y creciente (Teorema 25 y Ejercicio 198).*

Nota

Evidentemente una cota es

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} b^k / k! < +\infty . \blacksquare$$

En el caso de series de funciones , la condición de Cauchy toma la siguiente forma :

TEOREMA 27 (Condición de Cauchy para serie de funciones)

Una serie de funciones :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge uniformemente en D si y sólo si , dado $\epsilon > 0$ existe N tal que para todo $n \geq N$ tenemos :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+q} f_k(x) \right| < \epsilon \quad \text{para todo } x \in D, \text{ para todo } q = 1, 2, \ldots \quad (21)$$

La demostración es inmediata si aplicamos el teorema 26 a la sucesión $\{S_n(x)\}$ donde

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

ya que

$$S_{n+q}(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{n+q} f_k(x) . \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 86

Si $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ *converge uniformemente en* D *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *también converge uniformemente en* D.

Demostración

Utilizando la desigualdad :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+q} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+q} |f_k(x)| ,$$

aplicar la condición de Cauchy . $\blacksquare$

EJERCICIO 203

Sea $\{a_n(x)\}$ *una sucesión de funciones uniformemente acotada en* D. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ *converge uniformemente en* D , *demostrar que la serie*

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) f_n(x)$ converge uniformemente en D.

Sugerencia

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k(x)||f_k(x)| \leq M \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)|$$

donde M es una cota uniforme de $\{a_n(x)\}$. Aplicar la condición de Cauchy. ■

EJEMPLO 87

Sea

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < \frac{1}{n+1} \\ \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{x} & \text{si} \quad \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad \frac{1}{n} < x. \end{cases}$$

(i) Demostrar que $\{f_n\}$ converge a una función continua f, pero que la convergencia no es uniforme.

(ii) Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente para todo x, pero no uniformemente.

Solución

(i) Para cada x fijo, si n es suficientemente grande tenemos que

$$x < \frac{1}{n+1} \quad \text{(en caso de que } x \leq 0\text{)},$$

$$\text{ó} \quad x > \frac{1}{n} \quad \text{(en caso de } x > 0\text{)},$$

entonces

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) = 0 \qquad \text{para todo } x.$$

Para todo n tenemos:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+\frac{1}{2}} < \frac{1}{n},$$

luego:

$$f_n\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right) = \operatorname{sen}^2 \pi\left(n + \frac{1}{2}\right) = 1,$$

por lo tanto $f_n \to f$ no es uniforme (ver Fig. 57.).

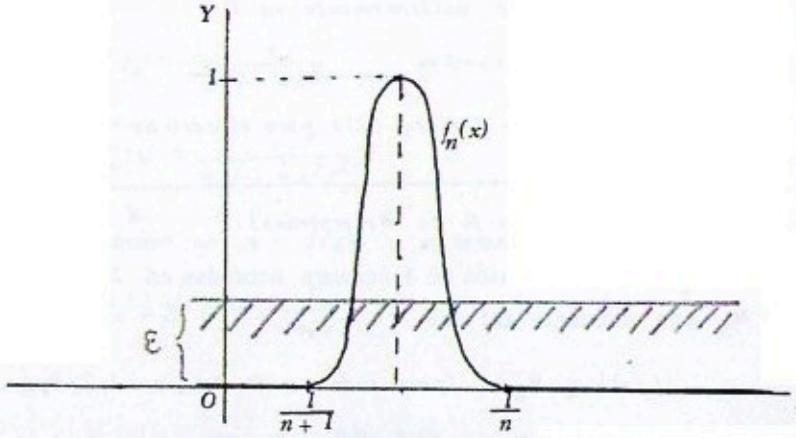


FIG. 57

(ii) Si $x \leqslant 0$ *, ó* $x > 1$ *luego* $f_n(x) = 0$ *para todo* n *, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 \ .$$

Si $0 < x \leqslant 1$ *, existen a lo más dos números naturales,* n *, tales que*

$$\frac{1}{n+1} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge absolutamente.*

Abora, consideremos la suma :

$$\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \qquad p = 1, 2, 3, \ldots \ .$$

Si $x = \dfrac{1}{n + \frac{1}{2}}$,

$$\sum_{k=n}^{n+p} f_k\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right) = 1 \ ,$$

esto es, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *NO satisface la condición de Cauchy para la convergencia uniforme de la serie de funciones.* ■

EJERCICIO 204

Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge uniformemente en* D *, demostrar que*

$$f_n \to 0 \quad \text{uniformemente en } D.$$

Sugerencia

Aplicar la condición de Cauchy (21) para el caso de $q = 1$. ■

TEOREMA 28 (Criterio M de Weierstrass) ✻

Sea $\{f_n(x)\}$ una sucesión de funciones acotadas en D, para cada n sea M_n una constante tal que

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad (\text{para todo } x \in D),\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Si la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces la serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge uniformemente en D.

Demostración

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k,$$

aplicar ahora la condición de Cauchy a la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$. ■

EJEMPLO 88

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie absolutamente convergente, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

convergen uniformemente en $R^1 = (-\infty, \infty)$ ya que

$$|a_n \operatorname{sen} nx| \leq |a_n|, \quad |a_n \cos nx| \leq |a_n|. \quad ■$$

EJEMPLO 89

Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1 + nx^2)}$ converge uniformemente para todo x real.

Solución

$$\text{Sea} \qquad f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)} \qquad \text{entonces}$$

$$f_n'(x) = \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2} \ ,$$

$f_n(x)$ *toma un máximo en* $x = 1/\sqrt{n}$ *y un mínimo en* $x = -1/\sqrt{n}$,

$$f_n\left(\pm\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \pm\frac{1}{2n\sqrt{n}} \ ,$$

tenemos que :

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2n\sqrt{n}} \qquad \text{para todo } x \ .$$

Como la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{n}}$ *converge , entonces la serie dada converge uniformemente .* ■

EJERCICIO 205

$$\text{Sea} \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2} \ ,$$

(i) ¿ Para qué valor de x la serie converge absolutamente ?

(ii) ¿ En qué intervalo la serie converge uniformemente ?

(iii) Investigar la continuidad y la acotación de la función f .

Solución

(i) Si $x \neq 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2x^2} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ ,$$

entonces la serie converge absolutamente si $x \neq 0$.

(ii) Sea $[a, b]$ *un intervalo cerrado que no contiene al origen (esto es ,* $a > 0$ *, ó* $b < 0$ *), para todo* $x \in [a, b]$ *se tiene :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{1+n^2x^2}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2x^2} \leqslant \begin{cases} \frac{1}{a^2} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} & (\text{si } a > 0) \\ \frac{1}{b^2} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} & (\text{si } b < 0) \ . \end{cases}$$

Por el criterio M de Weierstrass se tiene que la serie converge uniformemente en $[a, b]$.

Consideremos ahora un intervalo $(0, b]$ *(ó* $[a, 0)$ *).*

Tenemos :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{1+k^2x^2} > \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{1+4n^2x^2}$$

Aunque n *sea muy grande , si escogemos* $x = \frac{1}{2n} \in (0, b]$ *se tiene :*

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{1+k^2\{\frac{1}{2n}\}^2} > \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{1+1} = \frac{n}{2} \to \infty ,$$

esto es , la serie NO satisface la condición de Cauchy para la convergencia uniforme en $(0, b]$.

(iii) Si $x \neq 0$ *, existe un intervalo* $[a, b]$ *tal que*

$$x \in [a, b] , \quad 0 \notin [a, b].$$

Como $1/(n^2x^2+1)$ *es continua para todo* n, $f(x)$ *es continua en* $[a, b]$ *, o sea que* f *es continua en* $x \neq 0$.

$f(x)$ *es acotada en cualquier intervalo cerrado que no contenga al origen, pero* $f(x)$ *NO es acotada en* $(0, b]$ *(ó* $[a, 0)$*) ya que*

$$f(\frac{1}{n}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2(\frac{1}{n^2})} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2(\frac{1}{n^2})}$$

$$> \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+n^2(\frac{1}{n^2})} = \frac{n}{2} \to \infty \quad (n \to \infty) \qquad \blacksquare$$

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ satisface el criterio M de Weierstrass entonces la serie converge *absoluta* y *uniformemente , más aún , la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

converge uniformemente Pero , en general , el concepto de la convergencia absoluta es diferente al concepto de la convergencia uniforme , como se muestra en los siguientes ejemplos :

EJEMPLO 90

La serie $\sum_{n=o}^{\infty} x^n(1-x)$ *converge absolutamente en* $[0,1]$ *pero no uniformemente, mientras que la serie* $\sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n x^n (1-x)$ *converge uniformemente en* $[0,1]$.

Demostración

(i) Si $x = 1$, $\sum_{o}^{\infty} x^n(1-x) = \sum_{o}^{\infty} 0 = 0$

Si $x \in [0,1)$:

$$\sum_{o}^{\infty} |x^n(1-x)| = (1-x)\sum_{o}^{\infty} x^n = (1-x)\frac{1}{1-x} = 1 .$$

Como $x^n(1-x)$ *es continua en* $[0,1]$ *para todo* n, *si la convergencia de la serie* $\Sigma x^n(1-x)$ *fuera uniforme, su suma total sería una función continua en* $[0,1]$, *pero la suma total* f *es :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [0,1) \\ 0 & si \quad x = 1 , \end{cases}$$

por lo tanto la convergencia NO es uniforme .

(ii) Sea

$$S_n(x) = \sum_{k=o}^{n} (-1)^k x^k (1-x)$$

$$= (1-x)\frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x} \qquad (x \neq 1),$$

$$S_n(1) = 0 .$$

$$S_n(x) \to \frac{1-x}{1+x} \quad (n \to \infty) \qquad para\ todo \quad x \in [0,1].$$

$$\left|S_n(x) - \frac{1-x}{1+x}\right| = \frac{|(-x)^{n+1}|(1-x)}{1+x} = \frac{x^{n+1}(1-x)}{1+x}$$

Dado $\epsilon > 0$, *si* $x \in [1-\epsilon, 1]$, *para todo* n *tenemos*

$$\left|S_n(x) - \frac{1-x}{1+x}\right| = \frac{x^{n+1}(1-x)}{1+x} \leq 1-x \leq \epsilon .$$

Si $x \in [0, 1-\epsilon]$ entonces

$$|S_n(x) - \frac{1-x}{1+x}| = \frac{x^{n+1}(1-x)}{1+x} \leq x^{n+1} \leq (1-\epsilon)^{n+1},$$

luego existe N tal que $(1-\epsilon)^{N+\epsilon} < \epsilon$, por lo tanto :

$$n \geq N \quad \text{implica} \quad |S_n(x) - \frac{1-x}{1+x}| < \epsilon \quad (\text{para todo } x \in [0, 1]),$$

o sea que $S_n(x) \to (1-x)/(1+x)$ uniformemente en $[0, 1]$. ■

Con este ejemplo vemos que la convergencia uniforme y absoluta de la serie $\Sigma f_n(x)$ no siempre garantiza la convergencia uniforme de la serie $\Sigma |f_n(x)|$.

EJEMPLO 91

Demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$$

converge uniformemente en cualquier intervalo acotado, pero no converge absolutamente para ningún valor de x.

Solución

(i) Consideremos el intervalo $[-M, M]$, dado $\epsilon > 0$ existe N tal que si $n \geq N$ se tiene :

$$\sum_{k=n+1}^{n+q} \frac{1}{k^2} < \frac{\epsilon}{2M^2} \quad (\text{convergencia de } \Sigma \frac{1}{k^2})$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+q} \frac{(-1)^k}{k} < \frac{\epsilon}{2} \quad (\text{convergencia de } \Sigma \frac{(-1)^k}{k}),$$

entonces :

$$|\sum_{k=n+1}^{n+q} (-1)^k \frac{x^2+k}{k^2}| \leq \sum_{k=n+1}^{n+q} \frac{x^2}{k^2} + |\sum_{k=n+1}^{n+q} \frac{(-1)^k}{k}|$$

$$\leq M^2 \frac{\epsilon}{2M^2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

de acuerdo con la condición de Cauchy la serie converge uniformemente en $[-M, M]$.

(ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2+n}{n^2} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty . \blacksquare$$

§ 31 Criterio de Dirichlet

Recomendamos al lector repasar el parágrafo 16.

Dadas dos sucesiones de funciones $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ definidas en D, sea

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x),$$

entonces

$$\sum_{k=n+1}^{n+q} f_k(x)\, g_k(x) = \sum_{k=n+1}^{n+q} \{A_k(x) - A_{k-1}(x)\}\, g_k(x)$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+q} A_k(x)\, g_k(x) - \sum_{k=n+1}^{n+q} A_{k-1}(x)\, g_k(x)$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+q} A_k(x)\, g_k(x) - \sum_{k=n}^{n+q-1} A_k(x)\, g_{k+1}(x)$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+q} A_k(x)\, \{g_k(x) - g_{k+1}(x)\} + A_{n+q}(x)\, g_{n+q+1}(x) - A_n(x)\, g_{n+1}(x) \qquad (22)$$

Análogamente al teorema 11, aplicando a la fórmula (22) la condición de Cauchy obtenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 29 (Criterio de Dirichlet)

Si $\{A_n(x)\}$ es uniformemente acotada en D y $\{g_n(x)\}$ es una sucesión decreciente [#] que tiende a cero uniformemente en D, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, g_n(x)$$

converge uniformemente en D.

Nota

$g_n(x) \geq g_{n+1}(x)$ *para todo* $x \in D$, *todo* $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$g_n \to 0$ *uniformemente en* D.

Demostración

Sea M *una cota uniforme de* $|A_n(x)| = |\sum_{k=1}^{n} f_k(x)|$ *en* D, *como* $g_n \to 0$ *uniformemente en* D, *dado* $\epsilon > 0$ *existe* N *tal que para todo* $n \geq N$ *tenemos:*

$$g_n(x)| < \frac{\epsilon}{2M} \qquad \text{para todo } x \in D.$$

De (22) se tiene entonces:

$$|\sum_{k=n+1}^{n+q} f_k(x)\, g_k(x)|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{n+q} |A_k(x)\{g_k(x) - g_{k+1}(x)\}| + |A_{n+q}(x)\, g_{n+q+1}(x)| + |A_n(x)\, g_{n+1}(x)|$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+q} |A_k(x)||\{g_k(x) - g_{k+1}(x)\} + |A_{n+q}(x)||g_{n+q+1}(x)| + |A_n(x)||g_{n+1}(x)|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{n+q} M\{g_k(x) - g_{k+1}(x)\} + M\,|g_{n+q+1}(x)| + M\,|g_{n+1}(x)|$$

$$= M\,[g_{n+1}(x) - g_{n+q+1}(x)] + M\, g_{n+q+1}(x) + M\, g_{n+1}(x)$$

$$= 2M\, g_{n+1}(x) < 2M \frac{\epsilon}{2M} = \epsilon. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 92

Supongamos que

$$g_{n+1}(x) \leq g_n(x) \qquad \text{para todo } x \in D, \text{ todo } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Si $g_n \to 0$ *uniformemente en* D, *demostrar que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} g_n(x)$$

converge uniformemente en D.

Solución

Sea $f_n(x) = (-1)^{n-1}$, entonces $A_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$,

aplicando el criterio de Dirichlet la serie dada converge uniformemente en D. ■

EJERCICIO 206

Sean $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

(i) demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge para todo x real.

(ii) Demostrar que la serie converge uniformemente en cualquier intervalo cerrado que no contenga a los puntos $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$.

(iii) Demostrar que la serie no converge uniformemente en $(0, \pi]$.

(iv) Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ nunca converge.

Solución

(i) $$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx = \frac{\operatorname{sen} \frac{nx}{2} \operatorname{sen} (n+\frac{1}{2})x}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}$$

entonces

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx \right| \leq \frac{1}{\left| \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right|}$$

Si $x \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$, aplicando el criterio de Dirichlet (Teorema 11) la serie dada converge. Si $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ entonces $f_n(x) = 0$ para todo n, luego $\sum f_n(x) = \sum 0 = 0$.

(ii) En $[a, b]$ donde $a > 0$, $b < 2\pi$ se tiene:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx \right| \leq \text{Máximo} \left\{ \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{a}{2}}, \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{b}{2}} \right\},$$

aplicando el criterio de Dirichlet (Teorema 29) la serie converge uniforme

mente en $[a, b]$.

(iii) Si $x = \frac{1}{2n}$ se tiene:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{2n} f_k(1/2n) \right| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \operatorname{sen} \frac{k}{2n}$$

$$\geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2} \frac{k}{2n}\right) = \frac{1}{4} \qquad \# \underline{Nota}$$

entonces la serie no satisface la condición de Cauchy para la convergencia uniforme en $(0, \pi]$.

Nota:

$$\operatorname{sen} x \geqslant \frac{1}{2} x \quad \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

(iv) $f_n'(x) = \cos nx$,

La serie $\sum f_n'(x) = \sum \cos nx$ NO converge ya que $\{\cos nx\}$ NO converge a cero. ■

EJERCICIO 207

Demostrar el siguiente teorema (Criterio de Abel):

Sea $\{g_n(x)\}$ una sucesión decreciente de funciones definidas en D. Si $\{g_n(x)\}$ es acotada uniformemente y si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en D entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, g_n(x)$$

converge uniformemente en D.

Demostración

Sea M una cota uniforme de $\{g_n(x)\}$, como $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente entonces:

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \to A(x) \quad \text{uniformemente en } D,$$

o sea, dado $\epsilon > 0$ existe N tal que para todo $n \geqslant N$ tenemos:

$$|A_n(x) - A(x)| < \frac{\epsilon}{4M} \qquad (23)$$

De (22) tenemos :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+q} f_k(x)\, g_k(x) \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{n+q} A_k(x) \{g_k(x) - g_{k+1}(x)\} + A_{n+q}(x)\, g_{n+q+1}(x) - A_n(x)\, g_{n+1}(x) \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{n+q} [A_k(x) - A(x)]\{g_k(x) - g_{k+1}(x)\} + A(x) \sum_{k=n+1}^{n+q} \{g_k(x) - g_{k+1}(x)\} \right.$$

$$\left. + [A_{n+q}(x) - A(x)]\, g_{n+q+1}(x) - [A_n(x) - A(x)]\, g_{n+1}(x) \right.$$

$$\left. + A(x)\, g_{n+q+1}(x) - A(x)\, g_{n+1}(x) \right|$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{n+q} |A_k(x) - A(x)|\{g_k(x) - g_{k+1}(x)\} + |A_{n+q}(x) - A(x)||g_{n+q+1}(x)|$$

$$+ |A_n(x) - A(x)||g_{n+1}(x)|$$

$$+ |A(x)[\sum_{k=n+1}^{n+q} \{g_k(x) - g_{k+1}(x)\} + g_{n+q+1}(x) - g_{n+1}(x)]| \quad \underline{\#Nota}$$

$$\leqslant \frac{\epsilon}{4M} \sum_{k=n+1}^{n+q} \{g_k(x) - g_{k+1}(x)\} + \frac{\epsilon}{2M} |g_{n+q+1}(x)| + \frac{\epsilon}{2M} |g_{n+1}(x)|$$

$$= \frac{\epsilon}{4M} \{g_{n+1}(x) - g_{n+q+1}(x)\} + \frac{\epsilon}{2M} |g_{n+q+1}(x)| + \frac{\epsilon}{2M} |g_{n+1}(x)|$$

$$\leqslant \frac{\epsilon}{4M}\, 4M = \epsilon \,.$$

\# *Nota :*

$$\sum_{k=n+1}^{n+q} \{g_k(x) - g_{k+1}(x)\} = g_{n+1}(x) - g_{n+q+1}(x) \,. \quad \blacksquare$$

En el criterio de Abel , la sucesión $\{g_n\}$ puede ser creciente

EJEMPLO 93

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie convergente, si* $\{\mu_n\}(\mu_n \geq 1)$ *es una sucesión creciente, la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\mu_n)^{-x}$$

converge uniformemente en $x \geq 0$.

Solución

Como $\mu_{n+1} \geq \mu_n$ *entonces*

$$\frac{1}{(\mu_{n+1})^x} \leq \frac{1}{(\mu_n)^x} \qquad \text{para todo } x \geq 0$$

Por el criterio de Abel la serie converge uniformemente en $[0, \infty)$. ■

EJEMPLO 94

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *una serie convergente, demostrar que la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

converge uniformemente en $[0, 1]$.

Solución

Si $x \in [0, 1]$ *tenemos:*

$$x^{n+1} \leq x^n \leq 1,$$

por el criterio de Abel la serie converge uniformemente en $[0, 1]$. *Nótese que* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *es continua en* $[0, 1]$, *luego*

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (24)$$

El resultado (24) se conoce con el nombre de Teorema de Abel, el teorema de Abel para el producto de dos series (Teorema 20) es fácil de demostrar utilizando la relación (24) (ver § 38 Continuidad de la serie de potencias.)

■

Dada una sucesión de funciones integrables , $\{ f_n \}$, si

$$f_n \to f \quad \textit{uniformemente en } [a, b]$$

dado $\epsilon > 0$ existe N tal que para todo $n \geq N$ tenemos

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \textit{para todo } x \in [a, b] \tag{25}$$

Si , además , f es integrable en $[a, b]$, integrando la desigualdad (25) se tiene :

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)| \, dx < \int_a^b \epsilon \, dx = \epsilon (b - a) ,$$

o sea :

$$\left| \int_a^b f_n(x) \, dx - \int_a^b f(x) \, dx \right| = \left| \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \, dx \right|$$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \, dx < \epsilon (b - a) ,$$

esta desigualdad nos indica que

$$\int_a^b f_n(x) \, dx \to \int_a^b f(x) \, dx ,$$

o

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx = \int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(x) \, dx . \tag{26}$$

En otras palabras , ' el límite de la integral es igual a la integral del límite', o , ' $\lim_{n \to \infty}$ y $\int \ldots dx$ son intercambiables'.

Hemos supuesto la integrabilidad de la función límite para garantizar el resultado (26) , sin embargo podemos suprimir esta condición como puede verse en el siguiente teorema :

TEOREMA 30

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables en $[a, b]$, si

$$f_n \to f \quad \text{uniformemente en } [a, b]$$

entonces :

(i) f es integrable en $[a, b]$.

(ii) $$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx \qquad (n \to \infty)$$

Demostración

Dado $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$|f_N(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{4(b-a)} \quad \text{para todo } x \in [a, b],$$

o sea :

$$f_N(x) - \frac{\epsilon}{4(b-a)} < f(x) < f_N(x) + \frac{\epsilon}{4(b-a)} \qquad (27)$$

Como $f_N(x)$ es integrable en $[a, b]$, existe una partición del intervalo $[a, b]$:

$$a = x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n = b \qquad (\Delta_k x = x_k - x_{k-1})$$

tal que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f_N(t_k)\,\Delta_k x - \int_a^b f_N(x)\,dx \right| < \epsilon/4 \qquad (28)$$

donde t_k es cualquier punto del k-ésimo subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

De la desigualdad (27) tenemos : #Nota

$$\sum_{k=1}^{n} f_N(t_k)\,\Delta_k x - \frac{\epsilon}{4} < \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta_k x < \sum_{k=1}^{n} f_N(t_k)\,\Delta_k x + \frac{\epsilon}{4},$$

utilizando (28) :

$$\int_a^b f_N(x)\,dx - \frac{\epsilon}{2} < \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta_k x < \int_a^b f_N(x)\,dx + \frac{\epsilon}{2} \qquad (29)$$

Sean $U(f)$, $L(f)$ las sumas superior e inferior respectivamente :

$$U(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta_k x \quad , \qquad M_k = Sup\{f(t)/\ t \in [x_{k-1}, x_k]\} \ ,$$

$$L(f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k x \quad , \qquad m_k = Inf\{f(t)/\ t \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

entonces , de (29) tenemos :

$$\int_a^b f_N(x)\,dx - \frac{\epsilon}{2} \leqslant L(f) \leqslant U(f) \leqslant \int_a^b f_N(x)\,dx + \frac{\epsilon}{2} \ ,$$

o sea

$$U(f) - L(f) \leqslant \epsilon \ ,$$

esto es , la función f satisface la condición de Riemann , *o sea que f es integrable Riemann en* $[a, b]$.

 # Nota

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{4(b-a)} \Delta_k x = \frac{\epsilon}{4(b-a)} \sum_{k=1}^{n} \Delta_k x = \frac{\epsilon}{4(b-a)}(b-a) = \frac{\epsilon}{4} \ . \blacksquare$$

EJEMPLO 95

Sea $f_n(x) = e^{\frac{1}{n}\operatorname{sen} nx}$ *demostrar que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} f_n(x)\,dx = \pi .$$

Solución

$$\left|\frac{1}{n} sen\ nx\right| \leqslant \frac{1}{n} \qquad para\ todo\ \ x \ ,$$

o sea:

$$\frac{1}{n} sen\ nx \to 0 \quad uniformemente\ en\ [0, \pi].$$

Entonces : (Ejercicio 193)

$$e^{\frac{1}{n}\operatorname{sen} nx} \to e^{0} = 1 \quad uniformemente\ en\ [0, \pi]$$

Del teorema 30 se tiene :

$$\int_0^{\pi} e^{\frac{1}{n}\operatorname{sen} nx}\, dx \underset{(n\to\infty)}{\to} \int_0^{\pi} 1\, dx = \pi. \quad \blacksquare$$

EJERCICIO 208

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables en $[a, b]$, si $f_n \to f$ uniformemente, demostrar que

$$\int_a^x f_n(t)\, dt \to \int_a^x f(t)\, dt \quad \text{uniformemente en } x \in [a, b].$$

Solución

Sabemos que $f(t)$ es integrable en $[a, b]$, entonces :

$$\left| \int_a^x f_n(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \right| = \left| \int_a^x \{ f_n(t) - f(t) \}\, dt \right|$$

$$\leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\, dt \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\, dt \to 0 \quad (n\to\infty). \quad \blacksquare$$

EJERCICIO 209

(i) Demostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ converge uniformemente en $[-r, r]$, donde $0 < r < 1$.

(ii) Demostrar que :

$$\log(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{si } |x| < 1.$$

Solución

(i) Sea

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k = \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1 + x},$$

entonces

$$\left| S_n(x) - \frac{1}{x+1} \right| = \left| \frac{(-x)^{n+1}}{1 + x} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1 - r} \leq \frac{r^{n+1}}{1 - r} \to 0 \quad (n\to\infty),$$

esto es, $S_n(x) \to \frac{1}{1+x}$ uniformemente en $[-r, r]$.

(ii) Si $|x| < 1$ existe un número positivo r tal que

$$x \in [-r, r] , \qquad r < 1 .$$

Entonces :

$$\int_0^x S_n(t)\, dt \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = \log(1+x) ,$$

o sea :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \log(1+x) . \blacksquare$$

La convergencia uniforme de $\{f_n\}$ no es condición necesaria para obtener el resultado (26) como puede verse en los ejemplos siguientes :

EJEMPLO 96

Sea $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x^2}$, *demostrar que* $\{f_n(x)\}$ *converge puntualmente en* $[0, 1]$ *pero no uniformemente . ¿ Es posible integrar término por término esta sucesión ?*

Solución

$$f_n(0) = 1 \to 1 ,$$

$$f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2} \to 0 \quad si \quad x \neq 0 ,$$

entonces la función límite $f(x)$ *es :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x = 0 \\ 0 & si \quad x \neq 0 , \end{cases}$$

la cual es discontinua en $x = 0$, *pero* f_n *es continua para todo* n , *por lo tanto la convergencia no es uniforme .*

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 \frac{1}{1+n^2x^2}\, dx = \frac{1}{n^2} \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + (1/n)^2} = \frac{1}{n} \tan^{-1} nx \Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{n} \tan^{-1} n \to 0 \quad (n\to\infty) ,$$

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 0\, dx = 0 ,$$

por lo tanto tenemos :

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \int_0^1 f(x)\,dx \quad . \blacksquare$$

EJEMPLO 97

Sabemos que

$$f_n(x) = n\,x(1-x)^n \to 0 \quad \text{puntualmente en } [0,1],$$

y que la convergencia no es uniforme (Ejemplo 69).

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 n\,x(1-x)^n\,dx = \int_0^1 n(1-t)\,t^n\,dt \quad (t = 1-x)$$

$$= \frac{n}{(n+1)(n+2)} \to 0 \quad (n\to\infty),$$

$$\int_0^1 0\,dx = 0,$$

esto es,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx . \blacksquare$$

EJEMPLO 98

Demostrar que:

(i) $\lim_{n\to\infty} e^{-n\,\mathrm{sen}\,\theta} = f(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \neq 0, \pi \\ 1 & \text{si } \theta = 0, \pi. \end{cases}$

(ii) La convergencia en (i) no es uniforme en $[0,\pi]$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} e^{-n\,\mathrm{sen}\,\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi} \lim_{n\to\infty} e^{-n\,\mathrm{sen}\,\theta}\,d\theta = 0 .$

Solución

(i) Evidente.

(ii) $e^{-n\,\mathrm{sen}\,\theta}$ *es continua en* $[0,\pi]$ *pero la función límite* f *no es continua en* $0, \pi$, *entonces la convergencia no es uniforme.*

(iii) Dado $\epsilon > 0$, *la sucesión* $\{e^{-n\,\mathrm{sen}\,\theta}\}$ *converge a cero uniformemente en* $[\epsilon/3, \pi-\epsilon/3]$, *luego existe* N *tal que*

$n \geq N$ *implica* $|e^{-n \operatorname{sen}\theta}| < \frac{\epsilon}{3\pi}$ *para todo* $\theta \in [\epsilon/3, \pi - \epsilon/3]$.

Por lo tanto :

$$\int_0^{\pi} e^{-n \operatorname{sen}\theta}\, d\theta = \int_0^{\epsilon/3} e^{-n \operatorname{sen}\theta}\, d\theta + \int_{\epsilon/3}^{\pi-\epsilon/3} e^{-n \operatorname{sen}\theta}\, d\theta + \int_{\pi-\epsilon/3}^{\pi} e^{-n \operatorname{sen}\theta}\, d\theta$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3\pi}\pi + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

esto es ,

$$\int_0^{\pi} e^{-n \operatorname{sen}\theta}\, d\theta \;\to\; 0 \quad (n \to \infty) .$$

Otra solución

$$\int_0^{\pi} e^{-n \operatorname{sen}\theta}\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-n \operatorname{sen}\theta}\, d\theta .$$

Utilizando la siguiente desigualdad : (Fig. 58)

$$\frac{2}{\pi}\theta \leq \operatorname{sen}\theta \quad si \quad \theta \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

tenemos :

$$0 \leq \int_0^{\pi/2} e^{-n \operatorname{sen}\theta}\, d\theta$$

$$\leq \int_0^{\pi/2} e^{-n\frac{2}{\pi}\theta}\, d\theta$$

$$= -\frac{\pi}{2n}\, e^{-\frac{2n\theta}{\pi}}\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2n}(1 - e^{-n}) \to 0 \quad (n \to \infty) ,$$

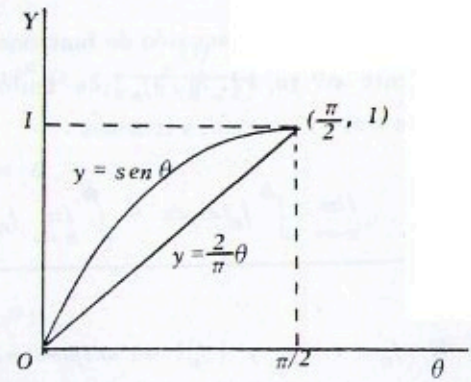


FIG. 58

esto es ,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} e^{-n \operatorname{sen}\theta}\, d\theta = 0 . \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 99

Sabemos que $f_n(x) = nx(1 - x^2)^n \to f(x) = 0$ *puntualmente en* $[0, 1]$

y que la convergencia no es uniforme (Ejercicio 190 (ii)).

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 nx(1-x^2)^n\,dx = \frac{n}{2(n+1)} \to \frac{1}{2} \quad (n \to \infty),$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

El siguiente teorema de Arzelá nos da otra condición suficiente para garantizar la integración *término por término* de una sucesión, su demostración es sumamente difícil pero el teorema es muy útil para varias aplicaciones, aquí lo enunciamos *sin demostración*.

TEOREMA 31 (Teorema de Arzelá)

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables que tiende a f puntualmente en $[a, b]$. Si $\{f_n\}$ es uniformemente acotada y f es integrable en $[a, b]$ entonces tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

NOTA:

Si $f_n \to f$, y $\{f_n\}$ es uniformemente acotada en $[a, b]$, se dice que $f_n \to f$ ACOTADAMENTE en $[a, b]$.

Según el teorema de Arzelá, en caso de convergencia acotada se puede integrar término por término la sucesión dada.

En el caso de los ejemplos 96, 97 y 98 las sucesiones convergen acotadamente, en cambio, la sucesión en el ejemplo 99 no converge acotadamente. Nótese que la convergencia uniforme no siempre implica la convergencia acotada, por ejemplo:

$$f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n} \to \frac{1}{x} \quad \textit{uniformemente en } (0, 1],$$

pero $\{f_n\}$ no es uniformemente acotada en $(0, 1]$.

El teorema de Arzelá da una condición suficiente para garantizar la integración de una sucesión de funciones término por término.

EJEMPLO 100

Sea $$f_n(x) = n^{3/2} x(1 - x)^n \quad \textit{en} \quad [0, 1],$$

evidentemente:

$$f_n(x) \to f(x) = 0 \quad \textit{puntualmente en } [0, 1].$$

La función f_n *toma su valor máximo en* $x = \frac{1}{n+1}$, *y*

$$f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = n^{1/2} \cdot \frac{n}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \to \infty \quad (n \to \infty).$$

Entonces, la convergencia $f_n \to f$ *no es uniforme ni acotada en* $[0, 1]$, *pero:*

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 n^{3/2} x(1 - x)^n\, dx = \frac{n^{3/2}}{(n+1)(n+2)} \to 0$$

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 0\, dx = 0. \quad \blacksquare$$

EJERCICIO 210

Sea $$f_n(x) = x^{n-1}(1 - 2x^n),$$

demostrar que:

(i) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{1}{x+1}$ *en* $[0, 1)$.

(ii) ¿Es acotada la convergencia en (i)?

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 0$.

(iv) $\int_0^1 f(x)\, dx = \log 2$.

Solución

(i) Sea $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ entonces

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} - 2x \sum_{k=1}^{n} x^{2(n-1)}$$

$$= \frac{1 - x^n}{1 - x} - 2x \frac{1 - x^{2n}}{1 - x^2} \xrightarrow[(n \to \infty)]{} \frac{1}{1 - x} - \frac{2x}{1 - x^2} = \frac{1}{1 + x} .$$

(ii) $$S_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x} - 2x \frac{1 - x^{2n}}{1 - x^2} = \frac{(1 - x) - x^n (1 + x + 2x^{n+1})}{1 - x^2}$$

$$= \frac{1}{1 + x} - x^n \frac{1 + x + 2x^{n+1}}{1 - x^2} .$$

Si $x \to 1^-$, $S_n(x) \to -\infty$, *luego* $S_n(x)$ *no es acotada en* $[0, 1)$ *y por lo tanto la convergencia no es acotada.*

(iii) $$\int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 x^{n-1}\, dx - 2\int_0^1 x^{2n-1}\, dx = \frac{1}{n} - \frac{2}{2n} = 0 ,$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 .$$

(iv) $$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + x}\, dx = \log (1 + x) \Big]_0^1 = \log 2 .$$ ■

EJERCICIO 211

Demostrar que :

(i) $\lim_{n \to \infty} n e^{-n^2 \operatorname{sen} \theta} = 0$ *en* $(0, \pi)$.

(ii) *La convergencia en (i) no es acotada ni uniforme en* $(0, \pi)$.

(iii) $\lim_{n \to \infty} \int_0^{\pi} n\, e^{-n^2 \operatorname{sen} \theta}\, d\theta = 0$.

Solución

(i) Evidente .

(ii) Para cada n *fijo ,* $\lim_{\theta \to o} n\, e^{-n^2 \operatorname{sen}\theta} = n \to \infty$.

(iii) $$0 \leq \int_o^{\pi} n\, e^{-n^2 \operatorname{sen}\theta}\, d\theta = 2 \int_o^{\pi/2} n\, e^{-n^2 \operatorname{sen}\theta}\, d\theta$$

$$< 2 \int_o^{\pi/2} n\, e^{-n^2 \frac{2}{\pi}\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{n}\,(1 - e^{-n^2}) \to 0 \quad (n \to \infty) .$$ ■

§ 33 Convergencia uniforme y derivación

Dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$, derivables en (a, b), la convergencia uniforme de $f_n \to f$ en (a, b) no garantiza la derivación término por término :

$$f_n'(x) \to f'(x) ,$$

como puede observarse en los siguientes ejemplos :

EJEMPLO 101

Sea $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx$, *sabemos (Ejercicio 206) que* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge uniformemente en* $[a, b]$ $(0 < a < b < \pi)$, *pero en ningún punto* x *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ *converge.* ●

EJEMPLO 102

Sea $$f_n(x) = \frac{x}{1 + n x^2} , \quad \text{entonces}$$

$$f_n \to f(x) = 0 \quad \text{uniformemente en } R^1 \quad (\text{Ejercicio 188 (ii)}) .$$

Tenemos : $$f_n'(x) = \frac{1 - n x^2}{(1 + n x^2)^2} \xrightarrow[(n \to \infty)]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 , \end{cases}$$

como $f'(x) = 0$ *se tiene :*

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x) \quad si \quad x \neq 0 \ , \quad \lim_{n\to\infty} f_n'(0) \neq f'(0) \ .$$

EJEMPLO 103

Sea $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + n^4 x^2}$, *entonces la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n^4 x^2}$$

converge uniformemente en $(-\infty, \infty)$ *ya que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty \quad (Criterio\ M\ de\ Weierstrass) \ .$$

Sea

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n^4 x^2}$$

entonces

$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ ,$$

luego :

$$f(x) - f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2 + n^4 x^2} - \frac{1}{n^2} \right\} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1 + n^2 x^2} \ ,$$

entonces :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = -x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2 x^2} \quad (para\ x \neq 0) \ .$$

Pero, para $x = \pm \dfrac{1}{m}$ *tenemos :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2 (\frac{1}{m^2})} > \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{1 + \frac{n^2}{m^2}} > \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{1 + \frac{m^2}{m^2}} = \frac{m}{2} \ ,$$

entonces

$$\frac{f(1/m) - f(0)}{(1/m)} < -\frac{1}{m} \frac{m}{2} = -\frac{1}{2} \ ,$$

$$\frac{f(-1/m) - f(0)}{(-1/m)} > \frac{1}{m} \frac{m}{2} = \frac{1}{2} \ ,$$

esto es ,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \quad \textit{NO existe ,}$$

o sea que $f'(0)$ *no existe . Sin embargo :*

$$f_n'(x) = -\frac{2x}{(1 + n^2 x^2)^2}$$

entonces :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 \ .$$

En el ejemplo 101 , la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ no converge , en el ejemplo 102 $\{f_n'\}$ converge y f es derivable pero $\lim_{n \to \infty} f_n' \neq f'$, y en el ejemplo 103 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ converge pero f no es derivable .

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones derivables con su derivada continua en $[a, b]$, si la sucesión de las derivadas , $\{f_n'\}$ converge uniformemente en $[a, b]$:

$$f_n' \to g \quad \textit{uniformemente en} \quad [a, b] \ ,$$

se tiene (Teorema 30 , Ejercicio 208) :

$$\int_c^x f_n'(t)\, dt \to \int_c^x g(t)\, dt \quad \textit{uniformemente en} \quad [a, b]$$

donde c es cualquier punto fijo del intervalo $[a, b]$, esto es :

$$f_n(x) - f_n(c) \to \int_c^x g(t)\, dt \quad \textit{uniformemente en} \quad [a, b] \ .$$

Si , suponemos que $\{f_n(c)\}$ converge , entonces se tiene :

$$f_n(x) \to \lim_{n \to \infty} f_n(c) + \int_c^x g(t)\, dt \quad \textit{uniformemente en} \quad [a, b] \ .$$

Como f_n' es continua , su límite uniforme g es también continua , entonces

$\int_c^x g(t)\,dt$ es derivable y su derivada es $g(x)$, esto es, $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a una función derivable cuya derivada es el límite de $f_n'(x)$:

$$\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx} f_n(x)\,. \qquad (30)$$

Para obtener la relación (30) hemos supuesto las tres condiciones :

(i) f_n es derivable y f_n' es continua .

(ii) $\{f_n'\}$ converge uniformemente .

(iii) Para algún punto c, $\{f_n(c)\}$ es una sucesión convergente .

Para obtener el mismo resultado , se puede suprimir la continuidad de f_n' como puede verse en el siguiente teorema 32 , pero al suprimir la hipótesis de la continuidad de f_n' la demostración va a ser muy artificiosa .

TEOREMA 32

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones derivables en (a, b), si :

(i) $\{f_n'\}$ converge uniformemente en (a, b).

(ii) Existe un $c \in (a, b)$ tal que $\{f_n(c)\}$ converge ,

entonces $\{f_n\}$ converge a una función derivable uniformemente en (a,b) y

$$\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)\,.$$

Demostración

Dado un punto $t \in (a, b)$ definimos la nueva sucesión $\{g_n\}$ como sigue :

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(t)}{x - t} & \text{si } x \neq t \\ f_n'(t) & \text{si } x = t\,. \end{cases} \qquad (31)$$

De la hipótesis (i), $\{g_n(t)\}$ converge. Aplicando la condición de Cauchy a la sucesión $\{g_n\}$ vamos a demostrar que $\{g_n\}$ converge uniformemente en (a, b). Tenemos :

$$g_{n+q}(x) - g_n(x) = \frac{|f_{n+q}(x) - f_n(x)| - |f_{n+q}(t) - f_n(t)|}{x - t} \qquad (x \neq t).$$

Aplicando el teorema del valor medio a la función $[f_{n+q} - f_n]$ *entre* t *y* x *se tiene:*

$$g_{n+q}(x) - g_n(x) = f'_{n+q}(x_o) - f'_n(x_o) \tag{32}$$

donde x_o *está entre* t *y* x. *Como* $\{f'_n\}$ *converge uniformemente en* (a, b), *dado* $\epsilon > 0$ *existe* N *tal que para todo* $n \geq N$ *tenemos:*

$$|f'_{n+q}(x) - f'_n(x)| < \epsilon \qquad \text{para todo } x \text{ y todo } q,$$

entonces de (32):

$$|g_{n+q}(x) - g_n(x)| < \epsilon \qquad \text{para todo } x \text{ y todo } q,$$

o sea que $\{g_n\}$ *converge uniformemente en* (a, b).

De (31), tomando $t = c$ *tenemos para todo* $x \in (a, b)$:

$$f_n(x) = f_n(c) + g_n(x)(x - c),$$

como $\{f_n(c)\}$ *converge y* $\{g_n\}$ *converge uniformemente entonces* $\{f_n\}$ *converge uniformemente a una función* f. * Nota

Ahora, para cualquier t *dado, de (31) se observa que la función* g_n *es continua ya que* f_n *es derivable. Como* $\{g_n\}$ *converge uniformemente, su función límite* $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ *es también continua, o sea*

$$\lim_{x\to t} \left(\lim_{n\to\infty} g_n(x) \right) = \lim_{n\to\infty} g_n(t) = \lim_{n\to\infty} f'_n(t),$$

esto es:

$$\lim_{x\to t} \left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(t)}{x - t} \right\} = \lim_{n\to\infty} f'_n(t).$$

Como $f_n \to f$ *entonces*

$$\lim_{x\to t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} = \lim_{n\to\infty} f'_n(t),$$

esto nos indica que la función límite f *es derivable en cualquier punto* t *del*

intervalo (a, b), y la derivada es el límite de la sucesión $\{f_n'\}$.

* Nota

Si $f_n(c) \to A$, $g_n(x) \to G(x)$ entonces

$$|f_n(x) - \{A + G(x)(x - c)\}| \leq |f_n(c) - A| + |x - c||g_n(x) - G(x)|$$

$$\leq |f_n(c) - A| + (b - a)|g_n(x) - G(x)| \to 0.$$

■

EJEMPLO 104

Sea $Q = \{x_n\}$ el conjunto de todos los racionales en $[0,1]$, sea

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}(x - x_n)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x - x_n} & \text{si } x \neq x_n \\ 0 & \text{si } x = x_n, \end{cases}$$

Como $|f_n(x)| \leq 1/2^n$ en $[0, 1]$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en $[0, 1]$ (Criterio M de Weierstrass). Sea

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{(x - x_n)^2}{2^n} \cdot \operatorname{sen}\left[\frac{1}{x - x_n}\right]$$

entonces f es continua en $[0,1]$. También:

$$f_n'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = x_n \\ \left(\frac{x - x_n}{2^{n-1}}\right)\operatorname{sen}\left[\frac{1}{x - x_n}\right] - \frac{1}{2^n}\cos\left[\frac{1}{x - x_n}\right] & \text{si } x \neq x_n, \end{cases}$$

luego:

$$|f_n'(x)| \leq \frac{|x - x_n|}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = \frac{3}{2^n}.$$

Por el criterio M de Weierstrass, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ converge uniformemente, del teorema 32 se tiene que f es derivable y

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}{}'\left(\frac{x - x_n}{2^{n-1}}\right)\operatorname{sen}\left[\frac{1}{x - x_n}\right] - \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{2^n}\cos\left[\frac{1}{x - x_n}\right]$$

donde en la suma Σ' omitimos $n = k$ si $x = x_k \in Q$.

NOTA

Si $x = x_k \in Q$ *entonces*

$$f'(x_k) = \sum_{n \neq k} \left(\frac{x_k - x_n}{2^{n-1}}\right) sen\left[\frac{1}{x_k - x_n}\right] - \sum_{n \neq k} \frac{1}{2^n} \cos\left[\frac{1}{x_k - x_n}\right]$$

Como $\frac{1}{2^k} \cos \frac{1}{x - x_k}$ *no tiende a cero cuando* $x \to x_k$, f' *no es continua en* $x_k \in Q$. ■

EJERCICIO 212

Sea $f_n(x) = \frac{1}{n^3 + n^4 x^2}$, *demostrar que* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge uniformemente a una función* $f(x)$ *en* $(-\infty, \infty)$ *donde* f *es derivable y que*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \quad \text{para todo } x \in (-\infty, \infty).$$

Solución

De la desigualdad :

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n^3 + n^4 x^2} \leq \frac{1}{n^3} \qquad (\text{para todo } x)$$

se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge uniformemente en* $(-\infty, \infty)$ *ya que* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ *converge .*

$$f_n'(x) = -\frac{2x}{n^2(1 + nx^2)^2} ,$$

como $|f_n'(x)| \leq 2/n^2$ *para todo* x [#Nota] , *la serie* $\Sigma f_n'(x)$ *converge uniformemente en* $(-\infty, \infty)$. *Aplicar ahora el teorema 32 .*

 # Nota

Si $|x| \leq 1$ *se tiene :*

$$\left|\frac{2x}{n^2(1 + nx^2)^2}\right| \leq \frac{2}{n^2(1 + nx^2)^2} \leq \frac{2}{n^2} ,$$

Si $|x| > 1$ *se tiene :*

$$\left|\frac{2x}{n^2(1+nx^2)^2}\right| \leq \frac{2|x|}{n^2(nx^2)^2} \leq \frac{2}{n^2} \quad . \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 105

Sea $f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-n^2x^2}$, *entonces*

$$f_n \to f(x) = 0 \quad \textit{uniformemente en} \quad R^1 .$$

También :

$$f_n'(x) = -2nx\, e^{-n^2x^2} \to 0 \quad \textit{en} \quad R^1 .$$

Esto es :

$$\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

sin embargo , $f_n' \to 0$ *no es uniforme en cualquier intervalo que contenga al origen como se ve a continuación :*

Si

$$|f_n'(x)| = 2n|x|\, e^{-n^2x^2} < \epsilon$$

entonces :

$$n|x| < \frac{\epsilon}{2} e^{n^2x^2} . \qquad (33)$$

Sea x_o *la mayor raíz de la ecuación*

$$\frac{2}{\epsilon} x = e^{x^2} ,$$

si $n = x_o/|x|$ *se tiene*

$$n|x_o| = \frac{\epsilon}{2} e^{n^2x_o^2} .$$

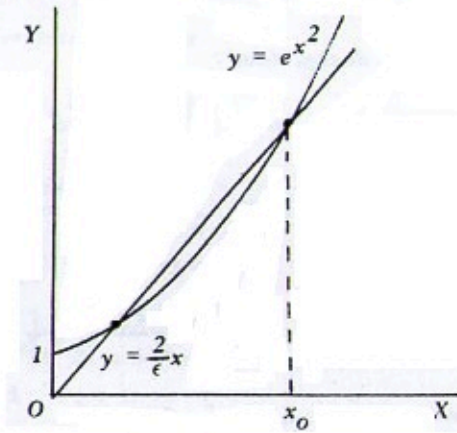


FIG. 59

Para obtener la desigualdad (33) se tiene

$$n > x_o/|x| ,$$

como $x_o/|x| \to \infty$ *cuando* $x \to 0$, $f_n' \to 0$ *no es uniforme en un intervalo que contenga al origen .* $\blacksquare$

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables en $[a, b]$, si para una función integrable f se tiene :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx = 0 \qquad (34)$$

se dice que $\{f_n\}$ converge a f en media y se nota :

$$l.i.m._{n\to\infty} \; f_n = f \qquad (35)$$

Si $f_n \to f$ uniformemente en $[a, b]$, ó acotadamente en $[a, b]$, evidentemente tenemos (34), pero la convergencia puntual no siempre implica la convergencia en media.

EJEMPLO 106

Sea
$$f_n(x) = \begin{cases} n x^n & si \quad x \neq 1 \\ 0 & si \quad x = 1 \end{cases} \qquad x \in [0, 1],$$

entonces

$$f_n(x) \to f(x) = 0 \quad en \quad [0, 1].$$

Pero,

$$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx = \int_0^1 n^2 x^{2n} \, dx = \frac{n^2}{2n+1} \to \infty,$$

esto es, f_n no converge a cero en el sentido de la convergencia en media. •

EJEMPLO 107

Sea $f_n(x) = [\cos n\pi x]^n$ *en* $[0, 1]$,

entonces :

$$\int_0^1 |f_n(x) - 0|^2 \, dx = \int_0^1 (\cos n\pi x)^{2n} \, dx$$

$$= \int_0^{n\pi} \cos^{2n} t \, \frac{dt}{n\pi} = \frac{2n}{n\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \, dt$$

$$= \frac{2}{\pi}(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{4}) \ldots \quad (1 - \frac{1}{2n})\frac{\pi}{2} \quad \to \quad 0 \quad (n \to \infty)$$

ya que el producto infinito $\prod^{\infty}(1 - \frac{1}{2n})$ diverge a cero, esto es:

$$l.\,i.\,m.\ (\cos n\pi x)^n = 0\,.$$

Si x es un número racional, digamos p/q (p, q son naturales), entonces para $n = qm$ (m = natural) se tiene:

$$(\cos n\pi x)^n = [\cos \pi q m \frac{p}{q}]^{qm} = (\cos mp\pi)^{qm} = (-1)^{m^2 pq}\,,$$

esto es, $\{(\cos n\pi x)^n\}$ no tiende a cero para x racional. ■

EJEMPLO 108

Sean $I_1 = [0, 1]$, $I_2 = [0, \frac{1}{2}]$, $I_3 = [\frac{1}{2}, 1]$, $I_4 = [0, \frac{1}{4}]$,

$$I_5 = [\frac{1}{4}, \frac{2}{4}],\ I_6 = [\frac{2}{4}, \frac{3}{4}],\ I_7 = [\frac{3}{4}, 1], \ldots .$$

en general, si $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$,

$$I_n = [\frac{n - 2^k}{2^k}, \frac{n + 1 - 2^k}{2^k}]\,.$$

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones tales que

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in I_n \\ 0 & si \quad x \notin I_n \end{cases} \qquad x \in [0, 1]\,,$$

entonces:

$$\int_0^1 |f_n(x) - 0|^2\, dx = \int_0^1 \{f_n(x)\}^2\, dx = \text{Longitud de } I_n \to 0 \ (n \to \infty)\,,$$

o sea:

$$l.i.m.\ f_n = 0\,.$$

Pero, si $x \in [0, 1]$ evidentemente se tiene:

$$\overline{lim}\ f_n(x) = 1\,, \quad \underline{lim}\ f_n(x) = 0\,,$$

esto es , $\{f_n(x)\}$ NO converge .

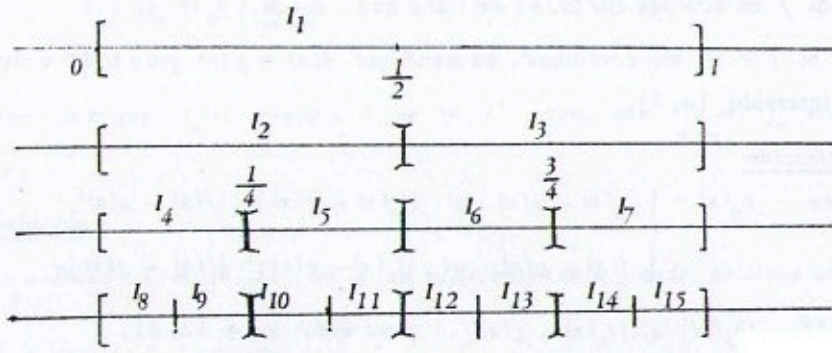


FIG. 60

Obsérvese que el límite en media de una sucesión de funciones , si existe , *no es único* ya que puede modificarse el valor de la función en un número finito de puntos sin alterar el valor de la integral , sin embargo , si existen *dos* límites en media :

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\ f_n = f \ , \qquad \underset{n\to\infty}{l.i.m.}\ f_n = g$$

tenemos :

$$|f(x) - g(x)|^2 = \{f(x) - f_n(x) + f_n(x) - g(x)\}^2$$

$$\leqslant 2\,|f(x) - f_n(x)|^2 + 2\,|f_n(x) - g(x)|^2 \ ,$$

lo cual implica que :

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|^2\,dx \leqslant 2\int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2\,dx + 2\int_a^b |g(x) - f_n(x)|^2\,dx$$

$$\to 0 \ ,$$

o sea :

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|^2\,dx = 0 \ . \qquad (36)$$

TEOREMA 33 ⊕

Supongamos que $\{f_n(x)\}$ converge puntualmente a $f(x)$ en $[a, b]$ y

que $l.i.m._{n\to\infty} f_n = g$.

(i) Si f es acotada en $[a, b]$ se tiene que $l.i.m._{n\to\infty} f_n = f$.

(ii) Si f y g son continuas, se tiene que $f(x) = g(x)$ para todo x del intervalo $[a, b]$.

Demostración

(i) *Sea*
$$b_n(x) = \begin{cases} f_n(x) - g(x) & si \quad |f_n(x) - g(x)| \leq |f(x) - g(x)| \\ f(x) - g(x) & si \quad |f_n(x) - g(x)| > |f(x) - g(x)| \end{cases}$$

entonces $|b_n(x)| \leq |f_n(x) - g(x)|$ *para todo* $x \in [a, b]$,

luego:
$$\int_a^b |b_n(x)|^2 \, dx \leq \int_a^b |f_n(x) - g(x)|^2 \, dx \to 0 \quad (n \to \infty).$$

También:
$$|b_n(x)| \leq |f(x) - g(x)| \leq M \quad para\ todo \quad x \in [a, b] \qquad (37)$$

donde M *es una cota de* $|f - g|$ *en* $[a, b]$. *(Nótese que* f *es acotada y* g *es integrable, luego* $f - g$ *es acotada.)*

Evidentemente se tiene:
$$b_n(x) \to |f(x) - g(x)| \quad puntualmente\ en\ [a, b],$$

y la convergencia es acotada (por (37)), entonces por el teorema de Arzelá (Teorema 31) tenemos:
$$\int_a^b |b_n(x)|^2 \, dx \to \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, dx,$$

pero como $\int_a^b |b_n(x)|^2 \, dx \to 0$ *se tiene que*
$$\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, dx = 0. \qquad (36)$$

De la desigualdad:
$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx \leq 2 \int_a^b |f_n(x) - g(x)|^2 \, dx + 2 \int_a^b |g(x) - f(x)|^2 \, dx$$

se tiene que $l.i.m._{n\to\infty} f_n = f$.

(ii) *De la relación (36) y de la continuidad de las funciones* f *y* g *se tiene que:*
$$f(x) = g(x) \quad para\ todo \quad x \in [a, b]. \ \blacksquare$$

EJEMPLO 109

$$Sea \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in [0,\ 1/n] \cup [\ 2/n,\ 1] \\ n & si \quad x \in (1/n,\ 2/n) \end{cases}$$

demostrar que $f_n(x)$ *tiende a 0 en* $[0, 1]$ *, pero que* $\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\ f_n$ *no existe .*

Solución

Dado $x \in (0, 1]$ *, si n es suficientemente grande se tiene que*

$$x > \frac{2}{n} \ ,$$

luego $f_n(x) \to 0 \ \ (n\to\infty)$ *. También ,*

$$f_n(0) = 0 \to 0 .$$

Del teorema 33 , si existiera límite en media sería igual a 0 , pero :

$$\int_0^1 |f_n(x) - 0|^2 \, dx = \int_{1/n}^{2/n} n^2 \, dx = n^2 \frac{1}{n} = n \to \infty ,$$

esto es , no existe $\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\ f_n$. ■

EJERCICIO 213

$$Sea \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x = 0 \ , \acute{o} \quad x \in [\frac{1}{n} \ , \ 1] \\ n - n^2 x & si \quad x \in (0, \frac{1}{n}) . \end{cases}$$

Demostrar que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ *en* $[0, 1]$ *y que no existe* $\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\ f_n$.

Sugerencia

Similar al ejemplo 109 .●

EJERCICIO 214

$$Sea \quad f_n(x) = \frac{x}{1 + x^n} \quad en \quad [0, 1] ,$$

demostrar :

(i) $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} x & si \quad x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & si \quad x = 1 \end{cases}$$

(ii) $$\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\ f_n = x .$$

Solución

(i) Evidente .

(ii) $$\int_0^1 |f_n(x) - x|^2\, dx = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{(1+x^n)^2}\, dx \qquad (x^n = t)$$

$$= \int_0^1 \frac{t\, t^{3/n}}{(1+t)^2}\, \frac{dt}{n} \leqslant \frac{1}{n} \int_0^1 dt = \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty) . \blacksquare$$

EJERCICIO 215

Si $\{f_n\}$ *converge en media en* $[a, b]$, *la sucesión* $\{\int_a^b |f_n(x)|^2\, dx\}$ *es acotada .*

Solución

Existe una función integrable f *tal que*

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2\, dx \to 0 .$$

Pero :

$$|f_n(x)|^2 = \{f_n(x) - f(x) + f(x)\}^2 \leqslant 2\,|f_n(x) - f(x)|^2 + 2|f(x)|^2$$

$$\int_a^b |f_n(x)|^2\, dx \leqslant 2 \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2\, dx + 2 \int_a^b |f(x)|^2\, dx ,$$

esto es , la sucesión $\{\int_a^b |f_n(x)|^2\, dx\}$ *es acotada .* $\blacksquare$

EJERCICIO 216

Sean

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\ f_n = f , \quad \underset{n\to\infty}{l.i.m.}\ g_n = g \quad \text{en } [a, b],$$

si

$$h_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, g_n(t)\, dt , \quad h(x) = \int_a^x f(t)\, g(t)\, dt , \quad x \in [a, b],$$

demostrar que $h_n \to h$ *uniformemente en* $[a, b]$.

Demostración

$$|h_n(x) - h(x)| \leqslant \int_a^x |f_n(t)\, g_n(t) - f(t)\, g(t)|\, dt$$

$$\leq \int_a^b |f_n(t)\, g_n(t) - f(t)\, g(t)|\, dt$$

$$\leq \int_a^b |f_n(t)\, g_n(t) - f_n(t)\, g(t)|\, dt + \int_a^b |f_n(t)\, g(t) - f(t)\, g(t)|\, dt$$

$$= \int_a^b |f_n(t)|\,|g_n(t) - g(t)|\, dt + \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,|g(t)|\, dt$$

(Aplicar la desigualdad de Cauchy Schwartz)

$$\leq \underbrace{\sqrt{\int_a^b |f_n(t)|^2\, dt}}_{\text{acotada (Ejercicio 215)}} \sqrt{\int_a^b |g_n(t) - g(t)|^2\, dt} \;\downarrow\; 0 + \sqrt{\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2\, dt} \;\downarrow\; 0 \sqrt{\underbrace{\int_a^b |g(t)|^2\, dt}_{\text{acotada}}}$$

$$\longrightarrow 0 \quad (n \to \infty). \blacksquare$$

EJERCICIO 217

Sea $\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\ f_n = f$ *en* $[a, b]$, *si* g *es integrable demostrar que*

$$\int_a^x f_n(t)\, g(t)\, dt \to \int_a^x f(t)\, g(t)\, dt \quad \textit{uniformemente en } [a, b].$$

Sugerencia

En el ejercicio 216 tomar $g_n(x) = g(x)$ *para todo* n. ∎

EJERCICIO 218

Sea $f_n(x) = n^{3/2}\, x\, e^{-n^2 x^2}$, *demostrar que* $|f_n(x)|$ *converge puntualmente a cero en* $[-1, 1]$, *pero que* $\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\ f_n$ *no existe.*

Sugerencia

$$\int_{-1}^{1} |f_n(x) - 0|^2\, dx = \int_{-1}^{1} n^3 x^2 e^{-2n^2 x^2}\, dx = 2n^3 \int_0^1 x^2 e^{-2n^2 x^2}\, dx$$

$$= 2n^3 \int_0^n \frac{t^2}{n^3} e^{-2t^2}\, dt = 2\int_0^n t^2 e^{-2t^2}\, dt \geq 2\int_0^1 t^2 e^{-2t^2}\, dt \neq 0.$$

■

EJERCICIO 219

Sea $f_n(x) = \cos^n x$ *en* $[0, \pi]$ *, demostrar que :*

(i) $\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\ f_n = 0$ *pero* $\{f_n(\pi)\}$ *no converge .*

(ii) $\{f_n(x)\}$ *converge en* $[0, \pi/2]$ *, pero la convergencia no es uniforme .*

Sugerencia

(i) $$\int_0^{\pi} \cos^{2n} x\, dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\, dx = \frac{1\ 3\ 5\ \ldots\ (2n-1)\pi}{2\ 4\ \ldots\ 2n}$$

$$= (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{4}) \ldots \quad (1 - \frac{1}{2n})\ \pi \to 0 \quad (n\to\infty).$$

(ii) $f_n(0) \to 1$.

$f_n(x) = \cos^n x = (\cos x)^n \to 0$ *si* $x \in (0\ ,\ \pi/2]$.

La convergencia no es uniforme ya que la función límite no es continua .

Nota

Si $\cos^n x < \epsilon$ *entonces* $n > \dfrac{\log \epsilon}{\log(\cos x)} \to \infty \quad (x \to 0^+)$.

■

§ 35 Convergencia uniforme del producto infinito

El producto infinito :

$$\prod_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

es la sucesión $\{P_n(x)\} = \{\prod_{k=1}^{n} g_k(x)\}$, así que podemos hablar de convergencia puntual y convergencia uniforme de un producto infinito como caso especial de sucesión de funciones

EJERCICIO 220

Sea $\{g_k(x)\}$ *una sucesión de funciones acotadas y diferentes de cero en* D *, demostrar que el producto infinito :*

$$\prod_{k=1}^{\infty} g_k(x)$$

converge uniformemente en D *si , dado* $\epsilon > 0$ *existe* N *tal que para todo* $n \geq N$ *se tiene*

$$|g_{n+1}(x) \times \ldots \times g_{n+q}(x) - 1| < \epsilon \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{para todo } x \in D \\ \text{para todo } q = 1, 2, 3, \ldots \end{array} \right\} (38)$$

Demostración

De la condición (38) tenemos :

$$|g_1(x) \ldots g_{N+q}(x) - g_1(x) \ldots g_N(x)| < \epsilon |g_1(x) \ldots g_N(x)|$$

o sea

$$|g_1(x) \ldots g_{N+q}(x)| < (1+\epsilon) |g_1(x) \ldots g_N(x)| \left\{ \begin{array}{l} \text{para todo } x \in D \\ \text{para todo } q = 1, 2, \ldots \end{array} \right\} (39)$$

Como $g_1(x), \ldots, g_N(x)$ *son acotadas , de (39) se deduce que existe una constante* M *tal qu*

$$|g_1(x) \ldots g_n(x)| \leq M \quad (\text{para todo } x \in D \text{ y para todo } n = 1, 2, 3, \ldots).$$

De (38) , para cualquier $n \geq N$ *tenemos :*

$$|g_1(x) \ldots g_{n+q}(x) - g_1(x) \ldots g_n(x)| \leq \epsilon |g_1(x) \ldots g_n(x)| \leq \epsilon M ,$$

esto es , la sucesión $\{\prod_{k=1}^{n} g_k(x)\}$ *satisface la condición de Cauchy para la convergencia uniforme . Evidentemente la función límite es diferente de cero en* D *ya que el producto infinito converge para cada* x *de acuerdo con la condición de Cauchy para el producto infinito (38) .* ∎

TEOREMA 34

Sea $\{g_n(x)\}$ una sucesión de funciones continuas y diferentes de

cero en $[a, b]$. El producto $\prod_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ converge uniformemente en $[a, b]$ si y sólo si, dado $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$n \geq N \quad \text{implica} \quad |g_{n+1}(x) \cdots g_{n+q}(x) - 1| < \epsilon \qquad (40)$$

para todo $q = 1, 2, \ldots$ *y todo* $x \in [a, b]$.

Demostración

Del ejercicio 220, la condición (40) es suficiente.

Ahora, supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} g_k(x) = P(x) \quad \textit{uniformemente en} \quad [a, b]$$

donde $P(x) \neq 0$ *en* $[a, b]$. *Primero, se observa que* P *es continua en* $[a, b]$, *luego:*

$$\inf_{x\in[a,b]} |P(x)| = c > 0.$$

Dado $\epsilon_0 < c$ *existe* N_0 *tal que si* $n \geq N_0$ *tenemos:*

$$|g_1(x)\, g_2(x) \cdots g_n(x) - P(x)| < \epsilon_0,$$

o sea:

$$|g_1(x) \cdots g_n(x)| > |P(x)| - \epsilon_0 \geq c - \epsilon_0 > 0$$

para todo $n \geq N_0$, *para todo* $x \in [a, b]$.

La sucesión $\{\prod_{k=1}^{n} g_k(x)\}$ *satisface la condición de Caucby para la convergencia uniforme, esto es, dado* $\epsilon > 0$ *existe* N *(podemos escoger* N *mayor que* N_0*) tal que si* $n \geq N$ *tenemos:*

$$|g_1(x) \cdots g_{n+q}(x) - g_1(x) \cdots g_n(x)| < \epsilon\,(c - \epsilon_0),$$

luego:

$$|g_{n+1}(x) \cdots g_{n+q}(x) - 1| < \frac{\epsilon\,(c - \epsilon_0)}{|g_1(x) \cdots g_n(x)|} < \frac{\epsilon\,(c-\epsilon_0)}{c - \epsilon_0} = \epsilon$$

para todo $q = 1, 2, \ldots$ *y para todo* $x \in [a, b]$. ∎

EJEMPLO 110

Sea $g_n(x) = x^{1/2^n}$ *, demostrar que :*

(i) $\prod_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ *converge uniformemente a* x *en* $(0, 1]$.

(ii) No satisface la condición (40) del teorema 34 en $(0, 1]$.

Solución

(i) $P_n(x) = g_1(x) \ldots g_n(x) = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}} = x \cdot x^{-1/2^n}$,

entonces :

$$|P_n(x) - x| = x\,[x^{-1/2^n} - 1] < x^{1-1/2^n} \leqslant x^{1/2} .$$

Dado $\epsilon > 0$ *si* $x \in (0, \epsilon^2)$ *tenemos :*

$$|P_n(x) - x| < x^{1/2} < \epsilon \quad (\textit{para todo } n) .$$

Si $\epsilon^2 \leqslant x \leqslant 1$ *tenemos :*

$$|P_n(x) - x| \leqslant [x^{-1/2^n} - 1] \leqslant [\epsilon^2]^{-1/2^n} - 1 ,$$

luego, existe N *tal que* $n \geqslant N_o$ *implica* $[\epsilon^2]^{1/2^n} - 1 < \epsilon$ *, o sea que* $|P_n(x) - x| < \epsilon$ *para todo* $x \in (0, 1]$ *si* $n \geqslant N_o$.

(ii)
$$g_{n+1}(x) \ldots g_{n+q}(x) = x^{\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+q}}} = x^{\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^q}\right)} .$$

Dado ϵ $(0 < \epsilon < 1)$ *si se tuviera la desigualdad :*

$$|x^{\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^q}\right)} - 1| < \epsilon \quad \textit{para todo } x \in (0, 1] ,$$

tomando límite cuando $x \to 0^+$ *se tendría :*

$$|0 - 1| = 1 \leqslant \epsilon \quad (\textit{absurdo !}) . \blacksquare$$

EJEMPLO 111

Sea $\{f_n(x)\}$ *una sucesión de funciones acotadas en* D.

Si

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n \quad converge.$$

demostrar que el producto :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \{1 + f_n(x)\}$$

converge uniformemente en D.

Solución

$$\left| \{ \prod_{k=n+1}^{n+q} (1 + f_k(x)) \} - 1 \right| \leq \left(\prod_{k=n+1}^{n+q} \{1 + |f_k(x)|\} \right) - 1$$

$$\leq \left(\prod_{k=n+1}^{n+q} (1 + M_k) \right) - 1 ,$$

nótese que la convergencia de $\sum_{1}^{\infty} M_n$ *implica la convergencia del producto* $\prod_{1}^{\infty} (1 + M_n)$, *luego* $\prod_{k=n+1}^{n+q} (1 + M_k) - 1 < \epsilon$ *si* n *es suficientemente grande. Aplicar ahora el ejercicio 220.*

Comparar con el criterio M de Weierstrass para el caso de serie.

EJERCICIO 221

Sea $$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \{(1 + \frac{x}{n}) e^{-x/n}\}$$

demostrar que f *es una función continua para todo* x *real.*

Solución

(i) $x \geq 0$. *Sea* $e^{-t} = 1 - t + R(t)$,

donde

$$|R(t)| = |\frac{e^{-\tau}}{2!} t^2| \leq \frac{t^2}{2} \quad (\text{Fórmula de Taylor}).$$

Entonces :

$$(1 + \frac{x}{n}) e^{-x/n} = (1 + \frac{x}{n})(1 - \frac{x}{n} + R(\frac{x}{n}))$$

$$= 1 - \frac{x^2}{n^2} + R(\frac{x}{n}) + \frac{x}{n} R(\frac{x}{n})$$

$$= 1 + f_n(x) \ ,$$

donde $$f_n(x) = -\frac{x^2}{n^2} + R(\frac{x}{n}) + \frac{x}{n} R(\frac{x}{n}) \leq \frac{x^2}{n^2} \{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{x}{n} \} .$$

Si $x \in [0, b]$ *entonces :*

$$f_n(x) \leq \frac{1}{n^2} \{ \frac{3}{2} b^2 + \frac{1}{2} \frac{b^3}{n} \}$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} [\frac{3}{2} b^2 + \frac{1}{2} \frac{b^3}{n} \} < +\infty \ ,$$

del ejemplo 111 el producto converge uniformemente en $[0, b]$, *luego* $f(x)$ *es continua en* $x \geq 0$.

(ii) $-p-1 < x < -p$ $(p = \text{natural})$ $\left(\text{ó } -1 < x < 1 . \right)$

Por un procedimiento análogo a (i), se tiene que el producto converge uniformemente en $(-p-1, -p)$, *entonces* $f(x)$ *es continua en* $(-p-1, -p)$.

(iii) Sea p *un número natural, entonces :*

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \{ (1 + \frac{x}{n}) e^{-x/n} \} = (1 + \frac{x}{p}) e^{-x/p} \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq p}}^{\infty} \{ (1 + \frac{x}{n}) e^{-x/n} \} \qquad (41)$$

Por un procedimiento similar al caso (ii), el producto en (41) converge uniformemente en $(-p-1, -p+1)$, *por lo tanto* f *es continua en* $x = -p$, *y* $f(-p) = 0$. ■

EJERCICIO 222

Sea $$F(x) = x \prod_{n=o}^{\infty} [1 - \frac{x^2}{n^2}]$$

demostrar que F *es continua para todo* x *real y que*

$$F(n) = 0 \ , \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Sugerencia

Similar al ejercicio 221. ■

§ 36 Serie de potencias

En este parágrafo se va a tratar de *series de términos complejos*, por lo tanto aclaremos alguna de sus propiedades .

Sea $\{z_n = x_n + iy_n\}$ una sucesión de números complejos, entonces tenemos :

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n .$$

Obsérvese que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente si y sólo si las series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ convergen absolutamente ya que :

$$|z_n| = \sqrt{(x_n)^2 + (y_n)^2} \leqslant |x_n| + |y_n| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{(x_n)^2 + (y_n)^2} = \sqrt{2}\,|z_n| ,$$

por lo tanto , la convergencia absoluta (o sea , la convergencia de $\Sigma |z_n|$) implica la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Utilizando la misma desigualdad , la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si y sólo si se cumple la condición de Cauchy , o sea , dado $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+q} z_k \right| < \epsilon \quad \textit{para todo} \quad n \geq N \ \textit{y todo} \ q = 1, 2, 3, \ldots .$$

De la misma forma , la condición de Cauchy para la convergencia uniforme , el criterio M de Weierstrass , etc. , son aplicables a series de términos complejos . ∎

Una serie de la forma :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n = a_0 + a_1 (z - c) + a_2 (z - c)^2 + \ldots \qquad (42)$$

se llama *serie de potencias* de $z - c$, donde z , c y los coeficientes a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ son números complejos. Aplicando el teorema 7 la serie en (42) converge absolutamente si

$$\overline{lim}\ \sqrt[n]{|a_n (z - c)^n|} = \overline{lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}\ |z - c| < 1 ,$$

sea

$$\overline{lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{\# Nota: } r \text{ puede ser } +\infty,\\ \qquad\ r \text{ puede ser } 0.\end{array}\right)$$

entonces la serie de potencias en (42) converge absolutamente si

$$\frac{|z-c|}{r} < 1 \quad , \quad \text{ó} \quad |z-c| < r. \qquad (43)$$

En el plano complejo z, el conjunto:

$$\{ z / |z-c| < r \}$$

es un círculo abierto con centro en c de radio r (ver Fig. 61), lo que se llama *círculo de convergencia* de la serie. Si z está en el exterior de círculo, o sea, $|z-c| > r$,

entonces:

$$\overline{lim}\ \sqrt[n]{|a_n(z-c)^n|} = \frac{|z-c|}{r} > 1,$$

esto es, la serie diverge ya que la sucesión $\{a_n(z-c)^n\}$ no tiende a cero. Si z está sobre la circunferencia, $|z-c| = r$, entonces a veces la serie converge y a veces la serie diverge, esta circunferencia se llama *la circunferencia de convergencia* de la serie, y su radio r se conoce con el nombre del *radio de convergencia*.

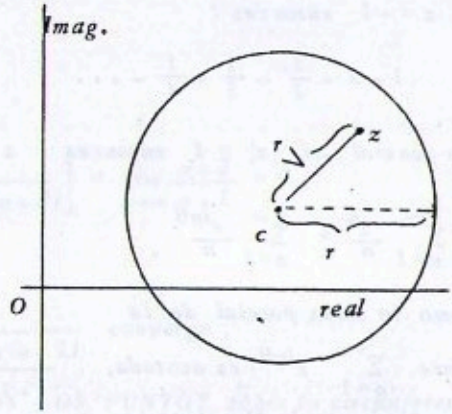


Fig. 61

EJEMPLO 112

$$\sum_{n=o}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \ldots$$

$$\frac{1}{r} = \overline{lim}\ \sqrt[n]{1} = 1$$

entonces el círculo de convergencia es el círculo unitario con centro en el origen. Si $|z| = 1$, $\{z^n\}$ *no tiende a cero, o sea que la serie diver*

ge sobre la circunferencia de convergencia. ●

EJEMPLO 113

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots$$

$$\frac{1}{r} = \overline{lim}\ \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \overline{lim}\ \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

luego, el círculo unitario es el círculo de convergencia.

Si $z = 1$ *entonces:*

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \qquad \text{diverge a } +\infty,$$

si $z = -1$ *entonces:*

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots \qquad \text{converge a } 1 - \log 2.$$

En general, si $|z| = 1$ *entonces* $z = e^{i\theta}$ $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$, y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n},$$

como la suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in\theta}$ *es acotada, por* el criterio de Dirichlet *la serie converge si* $\theta \neq 0$, *esto es, la serie converge sobre la circunferencia de convergencia salvo un solo punto* $z = 1$.

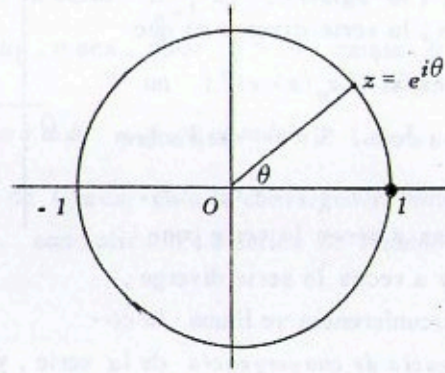


FIG. 62 (La serie diverge en $z = 1$.)

Advertencia

De la conocida desigualdad (Ejercicio 22):

$$\underline{lim}\ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leqslant \underline{lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \overline{lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \overline{lim}\ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

sabemos que si existe el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

se tiene :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{lim} \sqrt[n]{|a_n|} .$$

En muchas ocaciones es más fácil calcular el límite de $\{ |a_{n+1}/a_n| \}$, en el caso del ejemplo 60 :

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n+1} \Big/ \frac{1}{n} \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 .$$

EJEMPLO 114

Sea

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)} ,$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)} \Big/ \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1 .$$

Si $|z| = 1$ *se tiene :*

$$\left| \frac{z^n}{n(n+1)} \right| = \frac{1}{n(n+1)} \quad y \quad \sum \frac{1}{n(n+1)} \quad converge ,$$

entonces la serie converge en TODOS LOS PUNTOS sobre la circunferencia de convergencia .●

EJERCICIO 223

Sea r el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *si* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 1$, *demostrar que la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n \; z^n$$

tiene el radio de convergencia r .

Solución

Como $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 1$, *dadò* ϵ $(0 < \epsilon < 1)$ *existe N tal que para todo* $n \geq N$ *tenemos :*

$$1 - \epsilon < \sqrt[n]{|b_n|} < 1 + \epsilon ,$$

entonces :

$$(1 - \epsilon) \sqrt[n]{|a_n|} < \sqrt[n]{|a_n \cdot b_n|} < (1 + \epsilon) \sqrt[n]{|a_n|} .$$

Por lo tanto tenemos :

$$(1 - \epsilon) \overline{lim} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \overline{lim} \sqrt[n]{|a_n \cdot b_n|} \leqslant (1 + \epsilon) \overline{lim} \sqrt[n]{|a_n|} .$$

Como ϵ es cualquiera, se tiene :

$$\overline{lim} \sqrt[n]{|a_n \cdot b_n|} = \overline{lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r} .$$

NOTA : *De la advertencia anterior se puede cambiar la condición*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 1 \quad \text{por} \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = 1 .$$

■

EJERCICIO 224

Hallar el radio de convergencia de las siguientes series e investigar la convergencia o divergencia de las series sobre la circunferencia de convergencia.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) z^n$ (ii) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ (iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $(0 ! = 1)$

(iv) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot z^n$

Sugerencia

Similar a los ejemplos 59, 60 y 61. En (iii) $r = +\infty$ y en (iv) $r = 0$.

■

EJERCICIO 225

Hallar el círculo de convergencia de las siguientes series :

(i) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-2}}{(n-1)!} z^n .$

(ii) $1 + \frac{ab}{1c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!\, c(c+1)} z^2 + \ldots + \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)\, b(b+1)\ldots(b+n-1)}{n!\, c(c+1)\ldots(c+n-1)} z^n + \ldots .$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$ (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ (v) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n}}{n!}$

(vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot z^n}{n^2}$ (vii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{3^n \cdot n}$

(viii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right] \frac{z^{2n}}{2n}$ (ix) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n} \frac{z^n}{2n}$

(x) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n^k}$ (k = natural fijo)

(xi) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n}\right]^2 x^{2n}$

Respuesta

(i) $\frac{n^{n-2}}{(n-1)!} \Big/ \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} = \frac{n}{n+1} \left\{1 - \frac{1}{n+1}\right\}^{n-2} \to e^{-1}$, $r = e^{-1}$.

(ii) $r = 1$ (iii) $\sqrt[n]{n^n} = n \to \infty$, $r = \infty$.

(iv) $\frac{n!}{n^n} \Big/ \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$, $r = e$.

(v) $r = \infty$ (vi) $\frac{2^n}{n^2} \Big/ \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \to \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{2}$

(vii) $r = 3$.

(viii) $\frac{\left[1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right] \frac{1}{2n}}{\left[1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n+1}\right] \frac{1}{2n+2}} = \frac{\log(2n-1) + O(1)}{\log(2n+1) + O(1)} \frac{2n+2}{2n} \to 1$, $r = 1$.

(ix) $\frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots (2n)(2n)} \Big/ \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n+1)}{2 \cdot 4 \ldots (2n+2)(2n+2)} = \frac{(2n+2)^2}{2n(2n+1)} \to 1$, $r = 1$.

(x) $\{2^n\}^{1/n^k} = 2^{n^{1-k}} \to \begin{cases} 2 & si \quad k = 1 \\ 1 & si \quad k > 1 . \end{cases}$ $r = \begin{cases} 2 & si \quad k = 1 \\ 1 & si \quad k > 1 . \end{cases}$

(xi) $\left(\frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4 \ldots (2n)}\right)^2 \Big/ \left(\frac{1\cdot 3 \ldots (2n+1)}{2\cdot 4 \ldots (2n+2)}\right)^2 = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 \to 1$, $r = 1$. ■

EJERCICIO 226

Si el radio de convergencia de la serie de potencias $\Sigma a_n z^n$ *es 2, hallar el radio de convergencia de las siguientes series:*

(i) $\Sigma (a_n)^k z^n$ (k = *natural fijo*) (ii) $\Sigma a_n z^{kn}$ (k = *natural fijo*)

(iii) $\Sigma a_n z^{n^2}$

Solución

(i) $\overline{lim} \sqrt[n]{|a_n|^k} = \overline{lim} \left[\sqrt[n]{|a_n|}\right]^k = \frac{1}{2^k}$, $r = 2^k$.

(ii) $\Sigma a_n z^{kn} = \Sigma a_n (z^k)^n$,

la serie converge si $|z^k| < 2$, *diverge si* $|z^k| > 2$, *o sea que la serie converge si* $|z| < 2^{1/k}$, *diverge si* $|z| > 2^{1/k}$, *entonces* $r = 2^{1/k}$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n^2} = \sum_{j=n^2} a_{\sqrt{j}} z^j$, *entonces*

$$\sqrt[j]{|a_{\sqrt{j}}|} = \sqrt[n^2]{|a_n|} = \left[\sqrt[n]{|a_n|}\right]^{1/n} ,$$

$$\overline{lim} \left[\sqrt[n]{|a_n|}\right]^{1/n} = \lim_{n\to\infty} [1/2]^{1/n} = 1 , \quad r = 1. \blacksquare$$

TEOREMA 35

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ una serie de potencias. Si r es el radio de convergencia, para cualquier r_0 $(0 < r_0 < r)$ la serie converge uniformemente en $|z-c| \leq r_0$.

Demostración

$$\overline{lim} \sqrt[n]{|a_n|(r_0)^n} = \overline{lim} \sqrt[n]{|a_n|}\, r_0 = (r_0/r) < 1 ,$$

entonces la serie $\sum_{n=o}^{\infty} |a_n| (r_o)^n$ *converge, pero como :*

$$|a_n (z - c)^n| \leq |a_n| (r_o)^n$$

$$si \quad |z - c| \leq r_o ,$$

por el criterio M de Weierstrass la serie converge uniformemente en

$$|z - c| \leq r_o < r .$$

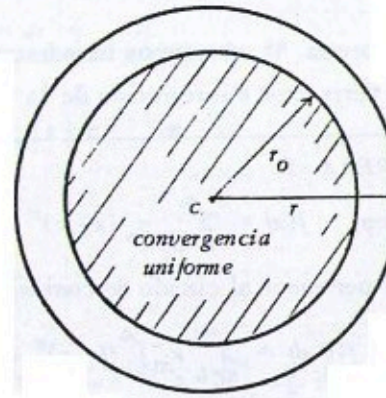


FIG. 63

COROLARIO

Una serie de potencias tiende a una función continua en el círculo de convergencia .

Demostración

Si $|z_o - c| < r$ *, existe* r_o *tal que* $|z_o - c| < r_o < r$. *Como la convergencia es uniforme en* $|z - c| \leq r_o$ *, la función límite es continua en* z_o ■

Este corolario puede expresarse en la siguiente forma :

> Una serie de potencias define una función continua en el círculo de convergencia .

Nótese que la convergencia de la serie $\sum a_n (z - c)^n$ es uniforme en $|z - c| \leq r_o$ para cualquier $r_o < r$, pero no siempre es uniforme en $|z - c| < r$, por ejemplo ; la serie $\sum_{n=o}^{\infty} z^n$ converge puntualmente a $1/(1 - z)$ pero no uniformemente en $|z| < 1$, como se ve a continuación:

$$S_n(z) = \sum_{k=o}^{n-1} z^k = \frac{1 - z^n}{1 - z} \quad , \quad |S_n(z) - \frac{1}{1 - z}| = |\frac{z^n}{1 - z}| .$$

Si $S_n(z) \to \frac{1}{1 - z}$ *uniformemente en* $|z| < 1$ *, dado* $\epsilon > 0$ *para n suficientemente grande se tendría :*

$$\frac{z^n}{1 - z} < \epsilon \quad para\ todo \quad |z| < 1 ,$$

tomando $z \to 1$:

$$+\infty < \epsilon \ , \quad \text{absurdo} \ . \ \blacksquare$$

Del teorema 35 obtenemos inmediatamente el siguiente teorema que garantiza la derivación e integración de la serie de potencias término por término:

TEOREMA 36

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$,

si z pertenece al círculo de convergencia de la serie , entonces tenemos:

(i) $$\int_c^z f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_c^z (t - c)^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - c)^{n+1} ,$$

(ii) $f(z)$ es derivable y

$$\frac{d}{dz} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dz} (z - c)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (z - c)^{n-1} \qquad (44)$$

donde la serie en (44) converge en el mismo círculo de convergencia de la serie para $f(z)$.

Demostración

(i) Sea r *el radio de convergencia de la serie dada , si* z *pertenece al círculo de convergencia , existe* $r_0 < r$ *tal que* $|z - c| < r_0 < r$. *Del teorema 35 la serie converge uniformemente en el círculo de radio* r_0 *con centro en* c *, y por el teorema 30 podemos integrar la serie término por término .*

(ii) Sea

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (z - c)^{n-1} \qquad (45)$$

entonces

$$\overline{lim} \sqrt[n]{n\,|a_n|} = \overline{lim} \sqrt[n]{n} \ \overline{lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{lim} \sqrt[n]{|a_n|}$$

ya que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ *(Ejercicio 223). Esto es , el radio de convergencia de la serie en (45) es igual a* r *. De (i) tenemos :*

$$\int_c^z g(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - c)^n = f(z) - a_0 \ .$$

Como g *es continua*, $\int_c^z g(t)\,dt$ *es derivable y su derivada es* $g(z)$, *o sea*

$$\frac{d}{dz}\{f(z) - c\} = \frac{d}{dz}\int_c^z g(t)\,dt = g(z),$$

ó,

$$\frac{d}{dz} f(z) = g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,(z-c)^{n-1}. \blacksquare$$

EJEMPLO 115

Sabemos :

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad , \quad |z| < 1$$

entonces

$$\int_0^z \frac{dt}{1-t} = -\log(1-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n \quad ,$$

$$\int_0^z -\log(1-t)\,dt = (1-z)\log(1-z) + z$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} z^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} z^n \quad .$$

EJERCICIO 227

Sea $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $(0! = 1)$,

demostrar que :

$$\frac{d\,g(z)}{dz} = g(z) \quad , \quad \int_0^z g(t)\,dt = g(z) - 1 \quad \textit{para todo } z. \blacksquare$$

Aplicando el teorema 36 sucesivamente se tiene :

$$\frac{d^k}{dz^k} f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)\,a_n\,(z-c)^{n-k} \quad , \qquad (45)$$

y el círculo de convergencia de la serie en (45) es igual al círculo de convergencia de la serie para $f(z)$, o sea :

> La función definida por una serie de potencias es derivable cuantas veces se quiera, y las derivadas son continuas en el mismo círculo de convergencia de la serie dada.

De (45), reemplazando $z = c$ se tiene:

$$f^{(k)}(c) = k!\ a_k\ , \quad \text{ó} \quad a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)\ ,$$

luego:

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n (z - c)^n = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (z - c)^n . \qquad (46)$$

TEOREMA 37

Sea r el radio de convergencia de la serie:

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n (z - c)^n .$$

Si b pertenece al círculo de convergencia se tiene la siguiente identidad:

$$f(z) = \sum_{k=o}^{\infty} A_k (z - b)^k \qquad (47)$$

donde

$$A_k = \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} a_j (b - c)^{j-k} .$$

El radio de convergencia de la serie de potencias en (47) no es menor que

$$r - |b - c| .$$

El teorema 37 puede expresarse también como sigue:

Una función definida por una serie de potencias es *desarrollable en serie de potencias* en cualquier punto del círculo de convergencia, y la nueva serie converge en el círculo máximo con centro en el punto del desarrollo contenido en el círculo de convergencia de la serie original (ver la figura 64.).

Demostración

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n (z - c)^n$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} a_n [(z - b) + (b - c)]^n$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} a_n \left[\sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} (b - c)^{n-k} \right] (z - b)^k$$

[cambio de orden en la serie iterada. #Nota]

La serie dada converge en el círculo grande, mientras que la nueva serie (47) desarrollada en el punto b converge en el círculo pequeño subrayado.

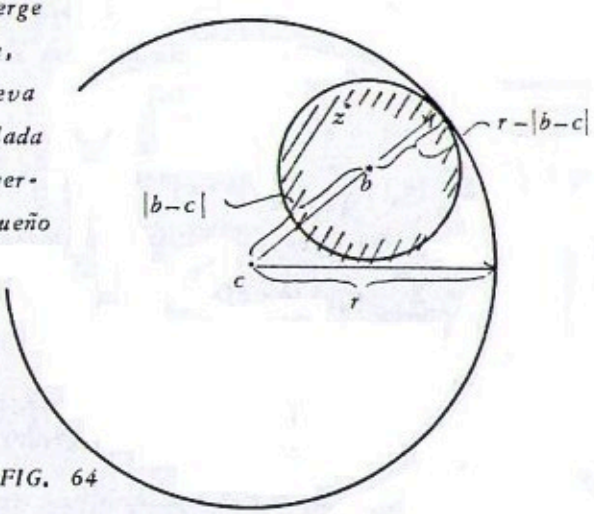


FIG. 64

$$= \sum_{k=o}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} (b-c)^{n-k} (z-b)^k \qquad (48)$$

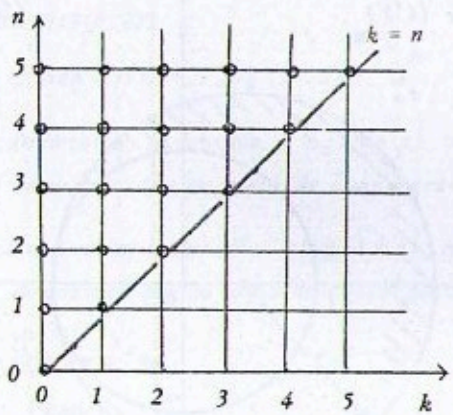
$$= \sum_{k=o}^{\infty} A_k (z-b)^k ,$$

donde

$$A_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} (b-c)^{n-k} \qquad (49)$$

. . . . . .

 # Nota



Los puntos (n,k) tales que

$n = 0 , k = 0$
$n = 1 , k = 0, 1$
$n = 2, k = 0, 1, 2$
$n = 3, k = 0, 1, 2, 3$

etc.

están indicados en la figura, que son iguales a los puntos (n, k) tales que :

$k = 0, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots .$
$k = 1, n = 1, 2, 3, 4, \ldots$
$k = 2, n = 2, 3, 4, \ldots .$, *etc.*

FIG. 65 $\quad \sum_{n=o}^{\infty} \{ \sum_{k=o}^{n} \ldots \} = \sum_{k=o}^{\infty} \{ \sum_{n=k}^{\infty} \ldots \} .$

Para justificar el cambio de orden en la serie iterada hecho para llegar a (48), basta demostrar la convergencia absoluta como sigue:

Si $|z - b| < b = r - |b - c|$ *(ver Fig. 64),*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |b - c|^{n-k} \} |z - b|^k$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \{ |b - c| + |z - b| \}^n < +\infty$$

ya que $|b - c| + |z - b| < r$.

Esto también nos muestra que la igualdad (47) es válida en

$$|z - b| < b = r - |b - c|,$$

o sea que el radio de convergencia de la serie en (47) no es menor que

$$b = r - |b - c|. \blacksquare$$

De (49):

$$A_k = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} (b - c)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} a_n \, n(n-1) \ldots (n-k+1)(b - c)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{k!} f^{(k)}(b). \qquad \text{(por (45))} \blacksquare \qquad (50)$$

EJEMPLO 116

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}$,

el círculo de convergencia es el círculo unitario con centro en el origen, sea $b = -1/2$ *(ver Fig. 66) entonces de (50) tenemos:*

$$A_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(-\tfrac{1}{2})$$

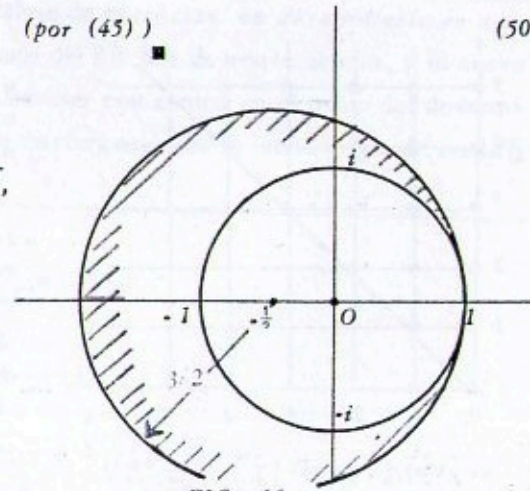


FIG. 66

$$= \frac{1}{k!}\, k! \cdot \{1 - \frac{1}{2}\}^{k-1} = (2/3)^{k+1} ,$$

por lo tanto tenemos :

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} z^n = \sum_{k=o}^{\infty} (\frac{2}{3})^{k-1} (z + \frac{1}{2})^k$$

Nótese que el radio de convergencia es (3/2), mayor que

$$1 - |-\frac{1}{2} - 0| = \frac{1}{2} .$$

La suma total de esta nueva serie es también igual a $\frac{1}{1 - z}$ *como sigue :*

$$\sum_{k=o}^{\infty} (\frac{2}{3})^{k-1} (z - \frac{1}{2})^k = \frac{2}{3} \sum_{k=o}^{\infty} \{\frac{2}{3}(z + \frac{1}{2})\}^k \qquad (\text{serie geométrica})$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}(z + \frac{1}{2})} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2 - 2z} = \frac{1}{1 - z}$$

EJERCICIO 228

Sea $\frac{1}{1 - z} = \sum_{k=o}^{\infty} (\frac{2}{3})^{k-1} (z + \frac{1}{2})^k$,

comprobar que $i = \sqrt{-1}$ *pertenece al círculo de convergencia de la serie, desarrollar la función* $1/(1 - z)$ *en serie de potencias de* $(z - i)$ *y hallar el radio de convergencia .*■

EJERCICIO 229

Sea $f(z) = - \log (1 - z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

(i) desarrollar la función $- \log (1 - z)$ *en serie de potencias de* $(z + \frac{2}{3})$ *y demostrar que su radio de convergencia es igual a* $\frac{5}{3}$.

(ii) Desarrollar la función $- \log (1 - z)$ *en serie de potencias de* $(z - \frac{1}{2})$ *y demostrar que su radio de convergencia es igual a* $\frac{1}{2}$.■

TEOREMA 38

Sean

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n (z - c)^n \qquad g(z) = \sum_{n=o}^{\infty} b_n (z - c)^n$$

dos series de potencias convergentes en el círculo común

$$|z - c| < r ,$$

entonces $f(z) + g(z)$ y $f(z)\cdot g(z)$ son desarrollables en serie de potencias de $(z - c)$ convergentes en el mismo círculo, y tenemos:

(i) $$f(z) + g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z - c)^n ,$$

(ii) $$f(z)\cdot g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - c)^n$$

donde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 .$$

Demostración

(i) es evidente.

(ii) Las dos series convergen absolutamente, entonces el producto de Cauchy converge absolutamente y es igual a $f(z)\cdot g(z)$. ■

EJEMPLO 117

Sean

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} , \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n ,$$

la primera converge en $|z| < 2$, *y la segunda converge en* $|z| < 1$ *(ver Fig. 67), entonces las dos series:*

$$f(z) + g(z) = \sum_{0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) z^n \quad y$$

$$f(z)\cdot g(z) = \sum_{0}^{\infty} c_n z^n$$

donde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^n} ,$$

convergen en $|z| < 1$.

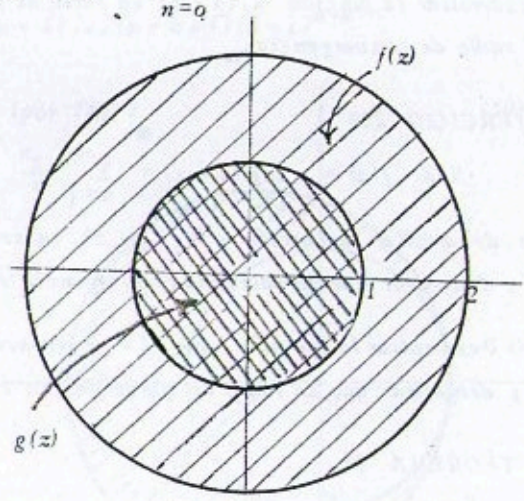


FIG. 67

EJEMPLO 118

Sean

$$f(z) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} \quad , \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad ,$$

la primera converge en $|z| < 2$ *y la segunda converge en* $|z| < 1$. *Tenemos:*

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, z^n$$

donde

$$c_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} \qquad (n \neq 0) \quad , \quad c_0 = 1$$

entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$ *converge en* $|z| < 2$, *esto es, el círculo de convergencia de la última serie es mayor que el círculo común de las dos series dadas.* ●

EJEMPLO 119

El radio de convergencia de las dos series:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2^n} - 1 \right\} z^n \quad , \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2^n} + 1 \right\} z^n$$

es uno, pero el radio de convergencia de la serie

$$f(z) + g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2^n} \, z^n$$

es igual a 2. ●

EJERCICIO 230

Sean

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 z^n \quad , \quad g(z) = 2 - 5z + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \, 6 \, z^n$$

demostrar que el radio de convergencia de ambas series es igual a 1, pero que el radio de convergencia de $f(z) \cdot g(z)$ *es mayor que 1.*

Sugerencia

$$f(z) \cdot g(z) = 2 - z$$

por lo tanto, el radio de convergencia es $+\infty$. ■

EJERCICIO 231

Sea $\sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n$ *una serie de potencias cuyo radio de convergencia es mayor que* r. *Demostrar que existe una constante* M *tal que*

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n} \quad \text{para todo } n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Solución

Como r *es estrictamente menor que el radio de convergencia, la serie* $\sum_{n=o}^{\infty} |a_n| r^n$ *converge, sea*

$$M = \sum_{n=o}^{\infty} |a_n| \cdot r^n$$

entonces :

$$|a_n| r^n \leq M \text{ , o sea, } |a_n| \leq M/r^n \text{ . } \blacksquare$$

EJERCICIO 232

Sean

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n \text{ , } g(z) = \sum_{n=o}^{\infty} b_n z^n$$

dos series de potencias convergentes en $|z| < \rho$. *Demostrar que la serie*

$$\sum_{n=o}^{\infty} c_n z^n \quad \text{con } c_n = \sum_{k=o}^{n} a_k b_{n-k}$$

converge en $|z| < \rho$.

Solución

Daremos una demostración sin utilizar el teorema 38.

Si $|z| < \rho$ *existe* r *tal que* $|z| < r < \rho$. *Del ejercicio 231 existe una constante* M *tal que*

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n} \text{ , } |b_n| \leq \frac{M}{r^n}$$

Entonces :

$$|c_n| \leq \sum_{k=o}^{n} |a_k b_{n-k}| \leq \sum_{k=o}^{n} \frac{M}{r^k} \frac{M}{r^{n-k}} = \frac{n M^2}{r^n} .$$

Por lo tanto :

$$\overline{lim} \sqrt[n]{|c_n|} \leq \overline{lim} \sqrt[n]{\frac{n M^2}{r^n}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n M^2}{r^n}} = \frac{1}{r}$$

esto es , el radio de convergencia de $\Sigma c_n z^n$ es mayor ó igual a r, por lo tanto la serie converge en $|z| < \rho$. ■

Aplicando el teorema 38 sucesivamente , si la serie

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n (z - c)^n$$

converge en $|z - c| < r$ entonces :

$$\{f(z)\}^k = \{\sum_{n=o}^{\infty} a_n (z - c)^n\}^k = \sum_{n=o}^{\infty} C_n(k) (z - c)^n$$

donde

$$C_n(k) = \sum_{(j_1+\ldots+j_k=n)} a_{j_1} a_{j_2} \cdots a_{j_k} \quad \text{\# Nota} \qquad (51)$$

\# Nota

La suma $\sum_{(j_1+\ldots+j_k=n)}$ es la suma para todo $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ tales que

$$j_1 + j_2 + \ldots + j_k = n \ , \quad j_1 \geq 0 \ , \ldots , j_k \geq 0 \ .$$ ■

TEOREMA 39

Sean

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} b_n (z - b)^n \ , \quad g(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

dos series de potencias , si $g(a) = a_o = b$ entonces existe un círculo con centro en a :

$$|z - a| < r$$

en donde $(f \circ g)(z) = f(g(z))$ es una serie de potencias de $(z - a)$.

Demostración

Para mayor sencillez supongamos que $a = 0$, $b = 0$ ($a_o = 0$). Sea r_1 el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=o}^{\infty} b_n z^n$, sea

$$h(t) = \sum_{n=o}^{\infty} |a_n| t^n \qquad (t = \text{real}) ,$$

así que h es una función continua en alguna vecindad de $t = 0$, pero como $h(0) = a_o = 0$ existe r (> 0) tal que

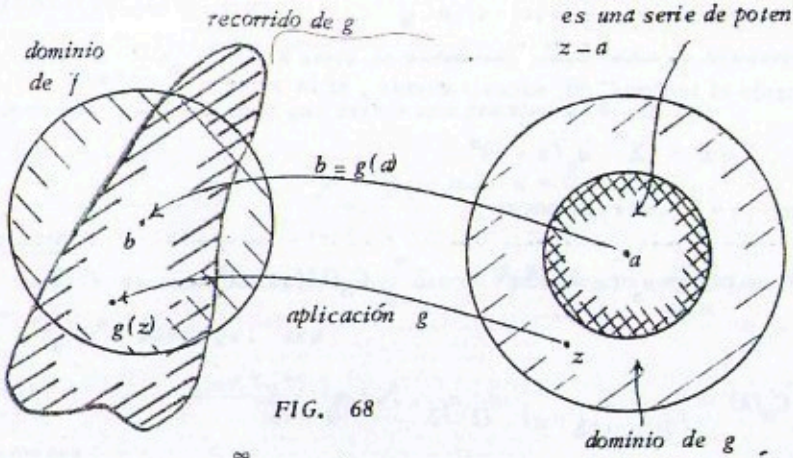


FIG. 68

$$b(r) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, r^n < r_1 .$$

Sea

$$\{g(z)\}^k = \{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \}^k = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(k) \, z^n$$

donde

$$C_n(k) = \sum_{(j_1 + \ldots + j_k = n)} a_{j_1} \, a_{j_2} \cdots a_{j_k} ,$$

si $|z| < r$ tenemos para todo $k = 1, 2, 3, \ldots$, :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n(k) \, z^n| \leqslant \{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |z|^n \}^k \leqslant \{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, r^n \}^k < (r_1)^k ,$$

por lo tanto se tiene :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \sum_{n=1}^{\infty} |C_n(k) \, z^k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, r^n \}^k < +\infty . \qquad (52)$$

Entonces, para $|z| \leqslant r$ tenemos :

$$f(g(z)) = b_o + \sum_{k=1}^{\infty} [\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n]^k = b_o + \sum_{k=1}^{\infty} [\sum_{n=1}^{\infty} C_n(k) \, z^n]$$

$$= b_o + \sum_{n=1}^{\infty} [\sum_{k=1}^{\infty} C_n(k) \, b_k] \, z^n , \qquad (53)$$

nótese que la convergencia absoluta de la serie iterada en (52) nos garan

tiza el cambio de orden en la serie iterada para llegar al resultado (53). ■

EJEMPLO 120

Sean

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

entonces :

$$b_n = \frac{1}{n}, \quad a_n = 1 \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

luego :

$$C_n(k) = \sum_{(j_1 + \ldots + j_k = n)} a_{j_1} a_{j_2} \cdots a_{j_k} = \binom{n-1}{k-1} \quad (n \geq k)$$

$$= 0 \qquad (n < k).$$

Tenemos entonces :

$$f(g(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \binom{n-1}{k-1} \right\} z^n, \qquad \left(\text{Nota } \binom{0}{0} = 1. \right)$$

la cual converge en $|z| < r$ *donde*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n = \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r} < 1,$$

o sea

$$r < \frac{1}{2}.$$

En realidad, $f(z) = -\log(1-z)$, $g(z) = \dfrac{z}{1-z}$, *o sea:*

$$f(g(z)) = -\log\left[\frac{1-2z}{1-z}\right] = \log(1-z) - \log(1-2z)$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{n} z^n.$$

Como $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{(2^n - 1)/n} = 2$, *el radio de convergencia es* $\frac{1}{2}$.

Nótese que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{1}{n} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - 1 \right] = \frac{1}{n} (2^n - 1). \qquad \left(2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \right)$$

■

TEOREMA 40

Sea $g(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n (z - c)^n$

si $g(c) = a_o \neq 0$ entonces existe un circulo con centro en c:

$$|z - c| < r$$

en donde $1/g(z)$ es desarrollable en serie de potencias de $(z - c)$.

Demostración

Para mayor sencillez supongamos que $c = 0$, *y que* $g(0) = 1$. #Nota

Sea

$$f(z) = \frac{1}{1 - z} = \sum_{n=o}^{\infty} z^n \ ,$$

como $1 - g(0) = 0$, *aplicando el teorema 39 se tiene que la función compuesta:*

$$f(1 - g(z)) = \frac{1}{1 - [1 - g(z)]} = \frac{1}{g(z)}$$

es una serie de potencias convergente en algún círculo con centro en 0. ■

Nota

Si $g(0) \neq 0$, *sea* $G(z) = g(z)/g(0)$, *entonces* $G(0) = 1$ *y*

$$\frac{1}{g(z)} = \left[\frac{1}{g(0)}\right] \frac{1}{G(z)} \ . \ ■$$

En el siguiente ejercicio 233, hallaremos explícitamente el desarrollo de $1/g(z)$ en serie de potencias de z.

EJERCICIO 233

Sea $g(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \qquad |z| < r$

hallar el desarrollo de $1/g(z)$ *en serie de potencias de* z, *y demostrar que la serie obtenida converge en alguna vecindad del origen.*

Solución

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{1 + \{\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\}}$$

$$= 1 - \{\sum_{1}^{\infty} a_n z^n\} + \{\sum_{1}^{\infty} a_n z^n\}^2 - \{\sum_{1}^{\infty} a_n z^n\}^3 + \ldots$$

$$+ (-1)^k \{ \sum_1^\infty a_n z^n \}^k + \ldots$$

$$= 1 - a_1 z + ((a_1)^2 - a_2) z^2 - ((a_1)^3 - 2a_1 a_2 + a_3) z^3 + \ldots \qquad (54)$$

Pero como :

$$\lim_{|z| \to 0} \sum_{n=1}^\infty |a_n| |z|^n = \lim_{|z| \to 0} |z| \sum_{n=1}^\infty |a_n| |z|^{n-1} = 0 ,$$

existe b tal que

$$|z| < b \qquad \text{implica} \qquad \sum_{n=1}^\infty |a_n| \, |z|^n < 1 .$$

Entonces , si $|z| < b$ la serie

$$1 + \{ \sum_1^\infty |a_n z^n| \} + \ldots + \{ \sum_1^\infty |a_n z^n| \}^k + \ldots .$$

converge , por lo tanto la serie (54) converge en $|z| < b$.■

Observación

$$\text{Sea} \qquad [\sum_{n=1}^\infty a_n z^n]^k = \sum_{n=1}^\infty C_n(k) z^n ,$$

en donde (ver (51)) :

$$C_n(k) = \sum_{(j_1 + \ldots + j_k = n)} a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_k} \qquad (n \geqslant k)$$

$$= 0 \qquad (n < k) .$$

Si $|a_n| \leqslant M / r^n$ tenemos :

$$|C_n(k)| \leqslant \sum_{(j_1 + \ldots + j_k = n)} \frac{M^k}{r^n} = \binom{n-1}{k-1} \frac{M^k}{r^n} \qquad (n \geqslant k) .$$

Entonces :

$$\frac{1}{g(z)} = 1 + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \sum_{n=k}^\infty C_n(k) z^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^\infty \{ \sum_{k=1}^n (-1)^k C_n(k) \} z^n ,$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n(k) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{M^k}{r^n} = \frac{M}{r^n}(1+M)^{n-1}$$

$$< \left[\frac{1+M}{r} \right]^n ,$$

por lo tanto, la serie para $1/g(z)$ *converge en*

$$|z| < \frac{r}{1+M} .$$

EJERCICIO 234 ⊕ (Serie para la función inversa)

Sea

$$y = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots \quad , \quad a_1 \neq 0 , \quad |a_n| \leq \frac{M}{r^n} \qquad (55)$$

donde M *es una constante positiva, hallar la fórmula para expresar* z *como una serie de potencias de* y, *y demostrar que la serie obtenida converge en alguna vecindad de* $y = 0$.

Solución

Supongamos

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} b_k y^k = b_1 y + b_2 y^2 + \ldots \qquad (56)$$

Reemplazando (55) en (56) (ver la observación anterior):

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right)^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left\{ \sum_{n=k}^{\infty} C_n(k) z^n \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} b_k C_n(k) \right\} z^n .$$

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} & b_1 C_1(1) = 1 \quad (\text{ó} \quad b_1 a_1 = 1) \\ & \sum_{k=1}^{n} b_k C_n(k) = 0 \quad \text{si} \quad n \geq 2 . \end{aligned} \qquad (57)$$

De (57) se puede hallar los valores de $b_1, b_2, \ldots$ *sucesivamente:*

$b_1 = 1/a_1$, $b_2 = -a_2/(a_1)^3$, ...

Nótese que la condición $a_1 \neq 0$ es indispensable para determinar los b_1, b_2, ...

Ahora, reemplazamos (56) en (55):

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n y^n \right)^k$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} a_k \, d_n(k) \right] y^n$$

donde

$$d_n(k) = \sum_{(j_1 + \ldots + j_k = n)} b_{j_1} b_{j_2} \cdots b_{j_k} .$$

Por lo tanto tenemos:

$$\left.\begin{aligned} & a_1 \, d_1(1) = 1 \quad (\text{ó} \quad a_1 b_1 = 1) \\ & \sum_{k=1}^{n} a_k \, d_n(k) = 0 \qquad si \quad n \geq 2 \end{aligned}\right\} ,$$

o sea:

$$a_1 b_n = - \sum_{k=2}^{n} a_k \, d_n(k) \tag{58}$$

ya que $d_n(1) = b_n$.

Como el segundo miembro de (58) contiene $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ entonces la relación (58) también nos sirve para determinar sucesivamente los valores de $b_1, b_2, b_3, \ldots$.

Ahora, para mayor sencillez supongamos que

$$a_1 = 1 ,$$

entonces:

$$b_1 = 1 , \quad b_n = - \sum_{k=2}^{n} a_k \, d_n(k) \qquad (n \geq 2) . \tag{59}$$

Consideremos ahora una relación entre dos parámetros s y t:

$$s = t - \lambda_2 t^2 - \lambda_3 t^3 - \ldots . \qquad \lambda_n = \frac{M}{r^n} \tag{60}$$

si

$$t = s + \beta_2 s^2 + \beta_3 s^3 + \ldots .$$

los valores de β_n $(n = 1,2,3,\dots)$ *son determinados por una relación similar a (59):*

$$\beta_n = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \tilde{d}_n(k) \qquad (61)$$

donde

$$\tilde{d}_n(k) = \sum_{(j_1+\dots+j_k=n)} \beta_{j_1}\beta_{j_2}\dots\beta_{j_k} .$$

Como $|a_n| \leq \lambda_n = M/r^n$ *para todo* n, *de (59) y (61) si* $|b_j| < \beta_j$ $(j = 1,2,\dots,n-1)$ *tenemos:*

$$|b_n| \leq \sum_{k=2}^{n} |a_k||d_n(k)| \leq \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \tilde{d}_n(k) ,$$

esto es, tenemos la siguiente desigualdad (por inducción):

$$|b_n| \leq \beta_n \qquad \text{para todo } n . \qquad (62)$$

De (60):

$$s = t - M \sum_{n=2}^{\infty} (t/r)^n = t - \frac{M t^2}{r(r-t)} ,$$

o sea:

$$(M+r)t^2 - r(s+r)t + sr^2 = 0 ,$$

entonces

$$t = \frac{r}{2(M+r)} \left[(s+r) \pm \sqrt{(s+r)^2 - 4s(M+r)}\right] .$$

Teniendo en cuenta que $s = 0$ *implica* $t = 0$, *hay que escoger el signo negativo:*

$$t = \frac{r}{2(M+r)} \left[(s+r) - \sqrt{(s+r)^2 - 4s(M+r)}\right] .$$

Sea

$$(s+r)^2 - 4s(M+r) = s^2 - 2s(2M+r) + r^2 = (s-\mu)(s-\nu)$$

entonces

$$\mu = (2M+r) + 2\sqrt{M(M+r)} , \quad \nu = (2M+r) - 2\sqrt{M(M+r)} ,$$

luego tenemos:

$$t = \frac{r}{2(M+r)} \left[(s+r) - \sqrt{\mu\nu}\,(1-\frac{s}{\mu})^{\frac{1}{2}}\,(1-\frac{s}{\nu})^{\frac{1}{2}} \right] . \qquad (63)$$

De (63) se ve que (63) es desarrollable en serie de potencias de s si $|s| < \nu$. *(Nótese que* $|s| < \nu < \mu$*). De (62) se tiene que la serie (56) converge si*

$$|y| < \nu = (2M + r) - 2\sqrt{M(M+r)} \qquad (64)$$

■

Nota

Si suponemos que $r = 1$, entonces

$$\nu = (2M + 1) - 2\sqrt{M(M+1)}$$

$$= \{\sqrt{M+1} - \sqrt{M}\}^2 = \frac{1}{\{\sqrt{M+1} + \sqrt{M}\}^2} < \frac{1}{(\sqrt{M} + \sqrt{M})^2} = \frac{1}{4M} .$$

Esto es, la serie de potencias (56) converge en $|y| \leq \frac{1}{4M}$:

TEOREMA ⊕

Sea $y = f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias convergente en $|z| \leq 1$. Si $a_1 = 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = M$ entonces la función inversa $z = f^{-1}(y)$ es una serie de potencias de y, convergente en

$$|y| \leq 1/4M .$$

EJEMPLO 121

Sea $y = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$, *entonces* $a_n = 1$ *para todo* $n = 1, 2, 3, \ldots$, *luego:*

$$C_n(k) = \sum_{(j_1 + \ldots + j_k = n)} 1 = \binom{n-1}{k-1}$$

De (57) tenemos:

$$b_1 = 1 ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \binom{n-1}{k-1} = 0 \quad si \quad n \geq 2 .$$

Así tenemos :

$$b_1 = 1\ ,\ b_2 = -1\ ,\ b_3 = 1\ ,\ \ldots\ ,\ b_k = (-1)^{k-1}\ ,\ \ldots \qquad \text{* Nota}$$

por lo tanto :

$$z = y - y^2 + y^3 - \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} y^k \ .$$

* Nota

Por inducción , si suponemos $b_k = (-1)^{k-1}$ *para* $k = 1, 2, \ldots, n-1$ *entonces*

$$b_n = -\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} b_k = -\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} (-1)^{k-1}$$

$$= -\sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j} (-1)^j = -\left[\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j - (-1)^{n-1} \right] = (-1)^{n-1} \ ,$$

ya que

$$(1-1)^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j = 0 \ . \qquad \bullet$$

§ 37 Fórmula de Taylor

En este parágrafo trataremos solamente de funciones de una *variable real* y de *valor real* , y de series de potencias de términos reales .

En el parágrafo anterior hemos estudiado las funciones definidas por las series de potencias , ahora a partir de una función real dada , estudiaremos su desarrollo en serie de potencias .

Sea $f(x)$ una función real definida en un intervalo (a, b), si f es desarrollable en serie de potencias de $x - c$ donde c pertenece a (a, b) entonces f es derivable cuantas veces se quiera y *todas sus derivadas son continuas (Teorema 36)*. Si una función f posee este carácter ,o sea para todo n , existe la n-ésima derivada $f^{(n)}$ en cualquier punto del intervalo (a, b) , se nota abreviadamente que

$$f \in C^{\infty} \qquad en \qquad (a, b) \ .$$

Si $f \in C^\infty$ en (a, b) conocemos la siguiente fórmula de Taylor:

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x - c)^{n-1} + R_n(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k + R_n(x) \qquad (f^{(0)} = f,\ 0! = 1) \qquad (65)$$

donde c y x están en (a, b). $R_n(x)$ es el resto de Taylor, y una de las expresiones para $R_n(x)$ es:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - c)^n \qquad (66)$$

donde x_0 es algún punto entre c y x. La otra expresión para $R_n(x)$ es:

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_c^x (x - t)^{n-1} f^{(n)}(t)\, dt\ . \qquad (67)$$

Si $R_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$, entonces de (65) se obtiene el desarrollo de f en serie de potencias de $x - c$.

EJEMPLO 122

Sea $f(x) = e^x$, $f \in C^\infty$ *en* $(-\infty, \infty)$,

y

$$f^{(n)}(x) = e^x \qquad \textit{para todo } n.$$

Tenemos:

$$R_n(x) = \frac{e^{x_0}}{n!}(x - c)^n \quad \textit{, donde } x_0 \textit{ está entre } c \textit{ y } x.$$

Si M = *Máximo* $\{x, c\}$ *entonces:*

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{e^M}{n!}|x - c|^n \to 0 \quad (n \to \infty),$$

por lo tanto, $f(x) = e^x$ *es desarrollable en serie de potencias:*

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^c}{k!}(x - c)^k\ .$$

Particularmente, si $c = 0$ *tenemos la conocida fórmula:*

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\ . \quad \bullet$$

Como en el ejemplo anterior, si $\{f^{(n)}(x)\}$ es uniformemente acotada, o sea que existe una constante M tal que

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \text{para todo } x \tag{68}$$

entonces

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n)}(x_o)|}{n!}|x - c|^n \leq M\frac{|x - c|^n}{n!} \to 0 \ ,$$

por lo tanto, f es desarrollable en serie de potencias de $x - c$.

EJEMPLO 123

(i) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f^{(n)}(x) = \pm \operatorname{sen} x$, ó $\pm \cos x$,

entonces $|f^{(n)}(x)| \leq 1$, *por lo tanto tenemos:*

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

(ii) De la misma manera:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ ,$$

EJERCICIO 235

(i) $f(x) = \log(1 + x)$, *entonces*

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1 + x)^{-n} \ ,$$

$$|R_n(x)| = \left|\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(1 + x_o)^{-n}x^n\right| \leq \frac{1}{n}|x|^n \to 0 \quad si \quad |x| < 1 \ ,$$

entonces:

$$\log(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

Nótese que el resultado es inmediato si integramos la serie:

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots .$$

(ii) $\log \frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x)^n}{n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}. \quad \blacksquare$$

Nótese que la función $\log(1+x)$ no cumple la condición (68), que es apenas una condición suficiente. En general, hay que emplear métodos especiales para obtener el desarrollo en serie de potencias de una función dada. Además, una función $f \in C^{\infty}$ *NO SIEMPRE* es desarrollable en serie de potencias.

EJEMPLO 124

$$\text{Sea} \quad f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|} & (\text{si } x \neq 0) \\ 0 & (\text{si } x = 0). \end{cases}$$

(i) Demostrar que existe $f^{(n)}(0)$ para todo n.

(ii) Demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge para todo x, pero no es igual a $f(x)$ si $x \neq 0$.

Solución

Por inducción #Nota se puede demostrar que

$$f^{(n)}(x) = [\text{un polinomio de } \tfrac{1}{x} \text{ de grado } 2n] \times e^{-1/|x|} \quad (x \neq 0)$$

$$f^{(n)}(0) = 0$$

entonces tenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 . x^n = 0 \neq f(x) \quad \text{si } x \neq 0$$

 # Nota

Sea $x > 0$, y supongamos:

$$f^{(n)}(x) = [\text{un polinomio de } \tfrac{1}{x} \text{ de grado } 2n] \times e^{-1/x},$$

entonces:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n)}(x)$$

$$= [\text{un polinomio de } \frac{1}{x} \text{ de grado } (2n+1)] \times e^{-1/x}$$

$$+ [\text{un polinomio de } \frac{1}{x} \text{ de grado } 2n] \times \frac{1}{x^2} e^{-1/x}$$

$$= [\text{un polinomio de } \frac{1}{x} \text{ de grado } 2(n+1)] \times e^{-1/x} .$$

De la misma manera, si $x < 0$ *se tiene:*

$$f^{(n)}(x) = [\text{un polinomio de } \frac{1}{x} \text{ de grado } 2n] \times e^{1/x} .$$

Abora, suponemos que $f^{(n)}(0) = 0$, *entonces*

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} f^{(n)}(x)$$

$$= \lim_{x \to 0} [\text{un polinomio de } \frac{1}{x} \text{ de grado } (2n+1)] \times e^{-1/|x|} = 0 . \blacksquare$$

EJERCICIO 236

Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 . \end{cases}$$

(i) Demostrar que $f \in C^{\infty}$ *en* $(-\infty, \infty)$.

(ii) Demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ *converge para todo* x, *pero no es igual a* $f(x)$ *si* $x \neq 0$.

Sugerencia

Similar al ejemplo 124. ■

EJEMPLO 125 (Serie binomial)

Demostrar el desarrollo binomial:

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \qquad \text{en} \quad |x| < 1 . \tag{69}$$

Solución

Sea

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \tag{i}$$

entonces la serie converge absolutamente en $|x| < 1$, *luego :*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{a}{n} n x^{n-1} = a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-1)(a-2)\ldots(a-n)}{n!} x^n$$

$$= a \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a-1}{n} x^n = a g(x)$$

donde

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a-1}{n} x^n \ . \qquad (ii)$$

También :

$$(1+x)\, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a-1}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{a-1}{n-1} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n = f(x) \ ,$$

o sea

$$(1+x)\, f'(x) = a f(x) \ .$$

Entonces tenemos :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{(1+x)^a}\right] = 0 \ ,$$

o sea

$$\frac{f(x)}{(1+x)^a} = C \quad (constante) \ ,$$

$$f(x) = C (1+x)^a \ .$$

Pero como $f(0) = 1$ *entonces* $C = 1$, *por lo tanto en* $|x| < 1$ *tenemos el desarrollo binomial (69).* ●

NOTA

Hay varios métodos para demostrar el desarrollo binomial (69), aquí daremos otra solución.

Sea $f(x) = (1+x)^a$ *entonces*

$$f^{(k)}(x) = a(a-1)\ldots(a-k+1)(1+x)^{a-k} \ ,$$

Utilizando la fórmula (67) tenemos :

$$(1+x)^a = 1 + \binom{a}{1}x + \cdots + \binom{a}{n-1}x^{n-1} + R_n$$

donde

$$R_n = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}(1+t)^{a-n}\,dt .$$

Aplicando el teorema del valor medio de la integración tenemos :

$$R_n = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}(1+x_0)^{a-n}x$$

$$= \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}\left[\frac{1-x_0/x}{1+x_0}\right]^{n-1}(1+x_0)^{a-1}x$$

donde x_0 *está entre* 0 *y* x .

Pero :

$$|1+x_0| \leq 1+|x| , \quad \left|\frac{1-x_0/x}{1+x_0}\right| < 1 \quad si \quad |x| < 1 ,$$

entonces :

$$|R_n| \leq \frac{|a(a-1)\cdots(a-n+1)|}{(n-1)!}|x|^n(1+|x|)^{a-1} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

ya que el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{(n-1)!}x^n$$

es igual a 1 . ■

EJERCICIO 237

Demostrar el siguiente desarrollo en $|x| < 1$ *:*

(i) $\operatorname{sen}^{-1}x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} + \cdots$

(ii) $\tan^{-1}x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots .$

Solución

(i) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\frac{3}{4}x^4 + \cdots$

$$+ \frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{(2n-1)}{2n}x^{2n} + \cdots .$$

integrando de 0 a x tenemos :

$$sen^{-1}x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \ldots .$$

(ii) Utilizar

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots .$$

■

EJERCICIO 238

Demostrar el siguiente desarrollo en $|x| < 1$ *:*

$$\log\left\{\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{1+x})\right\} = \frac{1}{2}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^3}{6} - \ldots .$$

Solución

$$\frac{d}{dx}\log\left\{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+x})\right\} = \frac{1}{2x}\left\{1 - (1+x)^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= \frac{1}{2x}\left[1 - \left\{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \ldots\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^2}{2} - \ldots .$$

entonces :

$$\log\left\{\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{1+x})\right\} = \frac{1}{2}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^3}{6} - \ldots .$$

■

EJERCICIO 239

Si $x = y(a+y)$ $(a > 0)$ *demostrar que :*

$$y = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^3} + \frac{4}{1\cdot 2}\frac{x^3}{a^5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}\frac{x^n}{a^{2n-1}} + \ldots .$$

Solución

$$y^2 + ay - x = 0 ,$$

$$y = \frac{1}{2}\left(-a \pm \sqrt{a^2+4x}\right) .$$

Teniendo en cuenta que $x = 0$ *implica* $y = 0$, *hay que escoger el signo positivo, o sea:*

$$y = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + 4x}) ,$$

pero:

$$\sqrt{a^2 + 4x} = a\left\{1 + \frac{4x}{a^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= a\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{4x}{a^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{4x}{a^2}\right)^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3 \ldots (2n-3)}{2^n\, n!}\left(\frac{4x}{a^2}\right)^n + \ldots\right\},$$

entonces:

$$y = \frac{x}{a^2} - \frac{x^2}{a^3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\, n!}\frac{x^n}{a^{2n-1}} + \ldots\ldots . \blacksquare$$

EJERCICIO 240 ⊕

Demostrar el siguiente teorema de Bernstein:

Sea $f \in C^\infty$ *en* $(a-\delta, b)$ *donde* $\delta > 0$. *Ni* f *ni sus derivadas son negativas en* $[a, b)$ *entonces tenemos el siguientes desarrollo:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k , \quad x \in [a, b) . \tag{70}$$

Demostración

(i) Primero demostramos (70) para $x \in [a, \frac{a+b}{2})$. *Si* $a \leqslant x < \frac{a+b}{2}$:

$$a \leqslant x \leqslant 2x - a < b ,$$

entonces existe un y *tal que*

$$2x - a < y < b .$$

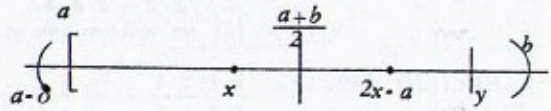


FIG 69

De la fórmula de Taylor en x *tenemos:*

$$f(y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^k + \frac{f^{(n)}(y_o)}{n!}(y-x)^n$$

donde $x < y_o < y$.

Como $f^{(k)}(x)\,(y-x)^k/k! \geqslant 0$ *para todo* k:

$$f(y) \geq \frac{f^{(n)}(y_o)}{n!}(y - x)^n . \qquad (71)$$

Además, la función $f^{(n)}$ es creciente ya que $(f^{(n)})' = f^{(n+1)} \geq 0$, esto implica que $f^{(n)}(x) \leq f^{(n)}(y_o)$, de (71) tenemos:

$$f(y) \geq \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(y - x)^n ,$$

o:

$$\frac{f^{(n)}(x)}{n!} \leq \frac{f(y)}{(y - x)^n} .$$

En la fórmula de Taylor (65), utilizando el resto (66) tenemos:

$$|R_n(x)| = \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - a)^n \leq \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - a)^n \leq f(y)\left[\frac{x - a}{y - x}\right]^n \to 0 \ (n \to \infty)$$

puesto que $(x - a)/(y - x) < 1$, por lo tanto tenemos el desarrollo (70) en $a \leq x < (a + b)/2$.

(ii) Sea $a \leq x < b$, en la fórmula de Taylor (65) se tiene que $R_n(x) > 0$ luego:

$$\sum_{k=o}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k \leq f(x) ,$$

entonces la serie $\sum_{k=o}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$ converge y su límite es menor que, o igual a $f(x)$. Sea

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=o}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k \geq 0 ,$$

entonces, por un razonamiento similar se tiene:

$$g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - \sum_{k=o}^{\infty} \frac{f^{(k+n)}(a)}{k!}(x - a)^k \geq 0 \quad (n = 1, 2, \ldots) .$$

En (i) hemos demostrado que

$$g(x) = 0 \quad si \quad a \leq x < \frac{a + b}{2} .$$

Sea $\lambda = Sup\ \{x / g(t) = 0$ para todo $t \in [a, x)\}$ (ver Fig. 70).

vamos a demostrar que $\lambda = b$. Si $\lambda < b$ existe $h < \lambda$ tal que

$\frac{b+b}{2} > \lambda$.

Como $g \in C^\infty$ ni g ni sus derivadas son negativas, en (i) reemplazando f por g y a por b tenemos el siguiente desarrollo:

FIG. 70

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(b)}{k!}(x-b)^k \quad si \quad b \leq x < \frac{b+b}{2},$$

pero $g^{(k)}(b) = 0$ para todo k ya que $g(x) = 0$ en $[a, \lambda)$, entonces:

$$g(x) = 0 \quad en \quad [b, \tfrac{b+b}{2}).$$

Como $(b+b)/2 > \lambda$, esto contradice la definición de λ, o sea que

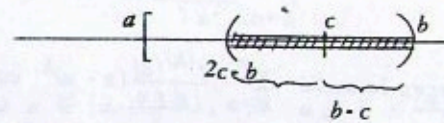
$$g(x) = 0 \quad en \quad [a, b).$$

■

NOTA

$f(x)$ es una serie de potencias convergente en $[a, b)$, entonces el radio de convergencia NO ES MENOR que $b-a$. Si $c \in [a,b)$, c pertenece al círculo de convergencia de la serie, luego se tiene el siguiente desarrollo:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k, \quad (72)$$



el cual es válido en:

$(2c-b, b)$ si $2c-b \geq a$,

$[a, b)$ si $2c-b < a$.

(ver Fig. 71).

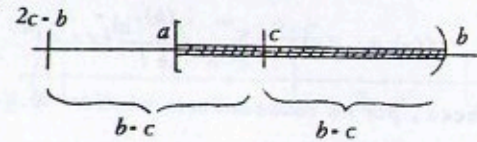


FIG. 71

■

EJEMPLO 126 ⊕

Sea $f(x) = (1:x)^{-\lambda}$ $(\lambda > 0)$, en $|x| < 1$,

entonces

$$f^{(k)}(x) = \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1)(1-x)^{-\lambda-k} > 0.$$

De la fórmula (72) $(a = -1, c = 0)$ se tiene en $|x| < 1$:

$$f(x) = (1 - x)^{-\lambda} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1)}{k!} x^k .$$

Reemplazando x *por* $-x$ *:*

$$(1 + x)^{-\lambda} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1)}{k!} (-1)^k x^k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-\lambda}{k} x^k \quad (\textit{desarrollo binomial}) . \blacksquare$$

§ 38 Continuidad de la serie de potencias en los puntos extremos del círculo de convergencia

Dada una serie de potencias de x (real) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n ,$$

si r es el radio de convergencia , la serie define una función continua en el intervalo $(-r, r)$, digamos $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, en este parágrafo vamos a estudiar el comportamiento de la función f cuando $x \to r^-$ ó $x \to -r^+$.

EJEMPLO 127

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , \quad x \in (-1, 1)$$

entonces

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = \frac{1}{2}$$

mientras que la serie diverge cuando $x = 1$ *, ó* $x = -1$ *:*

$$\sum_{0}^{\infty} 1 = +\infty \quad , \quad \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \quad \textit{diverge} . \bullet$$

EJEMPLO 128 (ver el ejemplo 115)

$$f(x) = -\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad , \quad x \in (-1, 1)$$

entonces

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = -\log 2$$

También :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^n}{n} = +\infty \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2 .$$

Nótese que la suma total de la serie en los puntos extremos del intervalo $(-1, 1)$ es igual al límite de la función definida por la serie en $(-1, 1)$. ■

EJEMPLO 129 (ver el ejemplo 115)

$$\text{Sea} \quad f(x) = x + (1 - x)\log(1 - x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} x^n ,$$

así tenemos :

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 , \quad \lim_{x \to -1} f(x) = -1 + 2\log 2 .$$

La serie converge en $x = 1$ *y* $x = -1$ *:*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} (1)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right] = 1 .$$

$$\sum_{n=2}^{2N} \frac{1}{(n-1)n} (-1)^n = \sum_{n=2}^{2N} (-1)^n \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right]$$

$$= 1 + 2\left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2N-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2N-2}\right)\right] - \frac{1}{2N}$$

$$= 1 - \frac{1}{2N} + 2\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2N-1} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2N-2}\right) - 1\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{2N} + 2\left[\log(2N-1) + C - (\log(N-1) + C) - 1\right] + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$= -1 + 2\log\frac{2N-1}{N-1} + O\left(\frac{1}{N}\right) \to -1 + 2\log 2 \quad (N \to \infty) ,$$

entonces :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} (-1)^n = -1 + 2\log 2 . \quad ■$$

TEOREMA 41 (Teorema de Abel)

Sea r el radio de convergencia de la serie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, si la serie converge en $x = r$ (ó $x = -r$) entonces :

$$\lim_{x \to r^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \quad \left(\text{ó} \quad \lim_{x \to -r^+} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-r)^n\right) .$$

Para mayor sencillez supongamos $r = 1$ (ésta no es una restricción esencial ya que por un cambio lineal $x = rX$ siempre se cumple esta condición.) Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge vamos a demostrar la relación :

$$\lim_{x \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad , \tag{73}$$

la cual ya fue demostrada en el ejemplo 94 utilizando el criterio de Abel para la convergencia uniforme . Ahora daremos una demostración diferente .

Demostración

Sean

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad , \quad f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n .$$

Como la serie $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *converge en* $(-1, 1)$ *se tiene (producto de Cauchy) :*

$$\frac{1}{1-x} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

donde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k .$$

Tenemos entonces :

$$f(x) - f(1) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - f(1) \frac{1-x}{1-x}$$

$$= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - (1-x) f(1) \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \{c_n - f(1)\} x^n \quad . \tag{74}$$

Por hipótesis , $\lim_{n \to \infty} c_n = f(1)$ *, o sea , dado* $\epsilon > 0$ *existe* N *tal que*

$$|c_n - f(1)| < \epsilon/2 \qquad \text{para todo} \quad n \geq N .$$

Separando la suma en (74) en dos partes : $\sum_{n=0}^{\infty} = \sum_{n=0}^{N-1} + \sum_{n=N}^{\infty}$ *, tenemos :*

$$f(x) - f(1) = (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} \{c_n - f(1)\} x^n + (1-x) \sum_{n=N}^{\infty} \{c_n - f(1)\} x^n . \tag{75}$$

En la primera suma:

$$|(1-x)\sum_{n=0}^{N-1}\{c_n - f(1)\}x^n| \leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{N-1}|c_n - f(1)|,$$

en la segunda suma $(n \geqslant N)$ *:*

$$|(1-x)\sum_{n=N}^{\infty}\{c_n - f(1)\}x^n| \leqslant (1-x)\sum_{n=N}^{\infty}\frac{\epsilon}{2}x^n$$

$$= \frac{\epsilon}{2}(1-x)\frac{x^N}{1-x} = \frac{\epsilon}{2}x^N < \frac{\epsilon}{2}.$$

Entonces tenemos:

$$|f(x) - f(1)| < (1-x)\sum_{n=0}^{N-1}|c_n - f(1)| + \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea

$$\delta < \epsilon/2\{\sum_{n=0}^{N-1}|c_n - f(1)|\},$$

entonces si $1-x < \delta$ *se tiene:*

$$(1-x)\sum_{n=0}^{N-1}|c_n - f(1)| < \frac{\epsilon}{2},$$

luego:

$$|f(x) - f(1)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

esto es:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1).$$

■

EJEMPLO 130

(i) $f(x) = x + (1-x)\log(1-x) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n}x^n.$

Sabemos que la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n}(-1)^n$ *converge absolutamente ya que*

$$\frac{1}{(n-1)n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

entonces:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -1 + 2\log 2 = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n}(-1)^n \text{ , (ver el ejemplo 129.)}$$

(ii) $g(x) = \tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots - (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$

(Ejercicio 237)

La serie converge cuando $x = 1$, luego:

$$\lim_{x \to 1^-} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \ldots$$

■

EJEMPLO 131

Aplicando el teorema 41 podemos demostrar fácilmente el teorema de Abel para el producto de Caucby de dos series (Teorema 20, Capítulo III).

Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dos series convergentes, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad y \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

son convergentes en $(-1, 1)$ ya que la convergencia en $x = 1$ implica que su radio de convergencia no es menor que 1. En $|x| < 1$ tenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

donde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} .$$

Si la serie $\sum_{0}^{\infty} c_n$ converge, aplicando el teorema 41 tenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \lim_{x \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \lim_{x \to 1} \sum_{0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{0}^{\infty} b_n x^n$$

Teorema 41

$$= \lim_{x \to 1} \sum_{0}^{\infty} a_n x^n \cdot \lim_{x \to 1} \sum_{0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{0}^{\infty} b_n$$

Teorema 41

Teorema 41

o sea que el producto de Caucby es igual al producto de las dos series dadas

EJERCICIO 241

Por un método similar al utilizado en el teorema 41 , demostrar que :

Suponiendo el radio de convergencia de la serie $\sum_{o}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ *igual a 1 , si* $\sum_{o}^{\infty} a_n = +\infty$ *entonces :*

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty .$$

Solución

Sea

$$c_n = \sum_{k=o}^{n} a_k$$

entonces

$$\frac{1}{1 - x} f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} x^n \sum_{n=o}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=o}^{\infty} c_n x^n ,$$

ó

$$f(x) = (1 - x) \sum_{n=o}^{\infty} c_n x^n .$$

Sea M un número positivo cualquiera , entonces :

$$f(x) - M = (1 - x) \sum_{n=o}^{\infty} (c_n - M) x^n$$

$$= (1 - x) \sum_{n=o}^{N-1} (c_n - M) x^n + (1 - x) \sum_{n=N}^{\infty} (c_n - M) x^n ,$$

donde N es tal que $c_n \geq M$ *para todo* $n \geq N$.

Por lo tanto , para todo $0 < x < 1$ *tenemos la desigualdad :*

$$f(x) - M > (1 - x) \sum_{n=o}^{N-1} (c_n - M) x^n .$$

Tomando límite cuando $x \to 1^-$ *se tiene :*

$$\lim_{x \to 1^-} [f(x) - M] \geq 0 ,$$

o sea

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) \geq M ,$$

como M es cualquiera se tiene :

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty . \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 132

(i) $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=o}^{\infty} x^n$.

Como $\sum_{n=o}^{\infty} 1 = +\infty$, entonces $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{1}{1-x} = +\infty$.

(ii) $-\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$,

como $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} = +\infty$, entonces $\lim_{x \to 1^-} -\log(1-x) = +\infty$. •

EJERCICIO 242

Sean Σa_n *y* Σb_n $(b_n > 0)$ *dos series divergentes, si las dos series de potencias de* x*:*

$$f(x) = \sum_{o}^{\infty} a_n x^n \quad y \quad g(x) = \sum_{o}^{\infty} b_n x^n$$

convergen en $|x| < 1$ *, demostrar que :*

(i) *Si* $\lim_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ *entonces* $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

(ii) *Si* $\lim_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$ *entonces* $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

Solución

(i) *Dado* $\epsilon > 0$ *existe* N *tal que*

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| < \epsilon \qquad \text{para todo} \quad n \geq N .$$

Sea $f_m(x) = a_o + a_1 x + \ldots + a_m x^m$, *para* $m \geq N$, $x > 0$ *tenemos*

$$|f(x) - f_m(x)| = \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k x^k \right| < \epsilon \sum_{k=m+1}^{\infty} b_k x^k \leq \epsilon\, g(x) ,$$

esto es :

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \epsilon + \left| \frac{f_m(x)}{g(x)} \right|$$

Tomando límite cuando $x \to 1^-$, $f_m(x)/g(x) \to 0$ *ya que* $g(x) \to +\infty$ *(ver el ejercicio 241), luego :*

$$\lim_{x \to 1^-} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \epsilon ,$$

o sea que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 .$$

(ii)

$$\frac{f(x)}{g(x)} \qquad l = \frac{\sum_{n=o}^{\infty} (a_n - l\, b_n)\, x^n}{\sum_{n=o}^{\infty} b_n\, x^n}$$

pero :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n - l\, b_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} - l = 0,$$

entonces , de (i) se tiene :

$$\lim_{x \to 1^-} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| = 0 . \blacksquare$$

EJEMPLO 133

Utilizando el ejercicio anterior , demostrar el teorema de Abel (Teorema 41).

Solución

Sea $\sum_{n=o}^{\infty} a_n$ *una serie convergente , sean*

$$f(x) = \frac{1}{1 - x} \cdot \sum_{o}^{\infty} a_n x^n = \sum_{o}^{\infty} x^n \cdot \sum_{o}^{\infty} a_n x^n = \sum_{o}^{\infty} c_n x^n ,$$

$$g(x) = \frac{1}{1 - x} = \sum_{o}^{\infty} x^n$$

donde $c_n = a_o + a_1 + \ldots + a_n .$

Entonces :

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1^-} \sum_{o}^{\infty} a_n x^n = \lim_{n \to \infty} \frac{c_n}{1} = \sum_{n=o}^{\infty} a_n . \blacksquare$$

EJERCICIO 243

Sea $(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$ *(desarrollo binomial),*

investigar el comportamiento del desarrollo binomial en $x = \pm 1$.

Solución

[1] $x = -1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}.$$

(i) Si $a = -b$ $(b > 0)$ *entonces:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-b)(-b-1)\dots(-b-n+1)}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(b+1)\dots(b+n-1)}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b \frac{b+1}{1} \frac{b+2}{2} \dots \frac{b+n-1}{n-1} \frac{1}{n} \geq b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$

entonces la serie diverge a $+\infty$.

(ii) Si $a = m+b$ $(m = 0,1,2,\dots,\ 0 \leq b < 1)$ *entonces:*

$$\sum_{n>m}^{\infty} (-1)^n \frac{(m+b)(m-1+b)\dots(m-m+b)(m-m-1+b)\dots(m-n+b+1)}{n!}$$

$$= \sum_{n>m}^{\infty} (-1)^n (-1)^{n-m-1} \frac{(m+b)\dots b(1-b)(2-b)\dots(n-m-1-b)}{n!}$$

$$= (-1)^{m-1} b(b+1)\dots(b+m) \sum_{n>m}^{\infty} \frac{(1-b)(2-b)\dots(n-m-1-b)}{n!}$$

Pero:

$$\sum_{n>m}^{\infty} \frac{(1-b)(2-b)\dots(n-m-1-b)}{n!} \leq \sum_{n>m}^{\infty} \frac{(1-b)(2-b)\dots(n-1-b)}{n!}$$

$$= \sum_{n>m}^{\infty} (1-b)(1-\tfrac{b}{2})\dots(1-\tfrac{b}{n-1})\frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{b} \sum_{n>m}^{\infty} \left[(1-b)(1-\tfrac{b}{2})\dots(1-\tfrac{b}{n-1}) - (1-b)(1-\tfrac{b}{2})\dots(1-\tfrac{b}{n-1})(1-\tfrac{b}{n})\right]$$

$$= \frac{1}{b}(1-b)(1-\tfrac{b}{2})\dots(1-\tfrac{b}{m}) \quad \textit{(serie telescópica)}.$$

Esto es, la serie binomial converge si $a \geq 0$.

[*II*] $x = 1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}$$

(i) Si $a = m + b$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, 0 \leq b < 1)$ *entonces la serie converge absolutamente (ver* [*I*] *(ii))*.

(ii) Si $a \leq -1$, *sea* $a = -b$ $(b \geq 1)$ *entonces:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-b(-b-1)\ldots(-b-n+1)}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{b(b+1)\ldots(b+n-1)}{n!},$$

la serie diverge ya que

$$\frac{b(b+1)\ldots(b+n-1)}{n!} \geq \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{n!} = 1.$$

(iii) $-1 < a < 0$, *o sea* $a = -b$ $(0 < b < 1)$ *entonces:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{b(b+1)\ldots(b+n-1)}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \{1-(1-b)\}\{1-\frac{1-b}{2}\}\{1-\frac{1-b}{3}\}\ldots\{1-\frac{1-b}{n}\},$$

la serie es alternada y converge condicionalmente ya que el producto infinito:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \{1 - \frac{1-b}{n}\} \qquad \textit{diverge a cero}.$$

En resumen:

[*I*] $x = -1$.

(i) $a < 0$ $\quad \lim_{x \to -1+} (1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} (-1)^n = +\infty$

(ii) $a \geq 0$ $\quad \lim_{x \to -1+} (1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} (-1)^n = 0.$

[*II*] $x = 1$

(i) $a > -1$. $\quad \lim_{x \to 1-} (1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} = 2^a$

(ii) $a \leq -1$. $\lim_{x\to 1^-} (1+x)^a = 2^a$, *pero* $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n}$ *diverge*. ■

Dada $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en $(-1, 1)$, el teorema de Abel garantiza que la convergencia de la serie en $x = 1$ (ó $x = -1$) implica la existencia del límite : $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ (ó $\lim_{x\to -1^+} f(x)$) . Sin embargo , la existencia del límite : $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ no siempre implica la convergencia de la serie en $x = 1$:

EJEMPLO 134

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad , \quad \lim_{x\to -1} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2} \quad ,$$

pero la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ *diverge*. ●

EJERCICIO 243 (A)

$$f(x) = (1+x)^a \quad (a \leq -1). \qquad \lim_{x\to 1} (1+x)^a = 2^a$$

pero la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n}$ *diverge*. ■

En los siguientes ejercicios observemos que la existencia del límite : $\lim_{x\to 1} f(x)$ implica la convergencia de la serie en $x = 1$ bajo algunas condiciones adicionales .

EJERCICIO 244

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(a_n \geq 0)$ *una serie de potencias convergente en* $|x| < 1$. *Si* $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *existe y es igual a* A, *demostrar que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A.$$

Demostración

La serie Σa_n *es de términos positivos ,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \quad , \qquad \text{ó} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \ (\text{finito}) .$$

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = +\infty$ *(Ejercicio 239), esto es im-*

posible. Entonces : $\sum_{n=o}^{\infty} a_n = S$. De acuerdo con el teorema de Abel se tiene que $A = S$. ■

EJERCICIO 245

Sea $f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n x^n$ convergente en $(-1, 1)$. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$, si $\lim_{x\to 1^-} f(x) = S$, demostrar que la serie $\sum_{n=o}^{\infty} a_n$ converge a S.

Solución

Sea $$\sigma_n = \frac{\sum_{k=o}^{n} k\,|a_k|}{n}$$

entonces :

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0 \quad \text{(Ejercicio 23)}.$$

Dado $\epsilon > 0$ existe N tal que para todo $n \geq N$ tenemos :

$$|f(1-\tfrac{1}{n}) - S| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \sigma_n < \frac{\epsilon}{3}, \quad n\,|a_n| < \frac{\epsilon}{3}.$$

$(f(x)\to S \text{ cuando } x\to 1) \qquad (\sigma_n \to 0) \qquad (n a_n \to 0)$

Sea $S_n = \sum_{k=o}^{n} a_k$, para $x \in (-1, 1)$ tenemos :

$$S_n - S = \sum_{k=o}^{n} a_k + f(x) - [\sum_{k=o}^{n} a_k x^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k] - S$$

$$= f(x) - S + \sum_{k=o}^{n} a_k (1 - x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k .$$

Para todo $x \in (0, 1)$ tenemos la desigualdad :

$$1 - x^k = (1 - x)(1 + x + \ldots + x^{k-1}) \leq k(1 - x) \quad \text{(para todo } k),$$

por lo tanto tenemos para $n \geq N$ y $x \in (0, 1)$:

$$|S_n - S| \leq |f(x) - S| + \sum_{k=o}^{n} k(1-x)\,|a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\epsilon}{3n} x^k$$

$$= |f(x) - S| + (1-x) \sum_{k=o}^{n} k\,|a_k| + \frac{\epsilon}{3n} \cdot \frac{x^{n+1}}{1 - x}$$

$$\leq |f(x) - S| + (1-x)\, n\sigma_n + \frac{\epsilon}{3n}\,\frac{1}{1-x} .$$

Como esta desigualdad es válida para todo $x \in (0, 1)$, *reemplazando* $x = 1 - \frac{1}{n}$ *se tiene :*

$$|S_n - S| \leq |f(1-\tfrac{1}{n}) - S| + \sigma_n + \frac{\epsilon}{3n}\, n < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon ,$$

esto es :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S .$$

EJERCICIOS ADICIONALES

EJERCICIO 246

Sea

$$\frac{1}{1-z} + \left[\frac{1}{1-z^2} - \frac{1}{1-z}\right] + \left[\frac{1}{1-z^4} - \frac{1}{1-z^2}\right] + \ldots .$$

demostrar que : la serie converge a 0 si $|z| > 1$, *converge a 1 si* $|z| < 1$ *y diverge si* $|z| = 1$.

Solución

Sea S_n *la suma parcial de la serie :*

$$S_n(z) = \frac{1}{1 - z^{2n-2}} .$$

Si $|z| < 1$ *entonces* $z^{2n-2} \to 0$ $(n \to \infty)$, *luego :*

$$S_n(z) \to 1 \quad (n \to \infty) .$$

Si $|z| > 1$ *entonces* $|z^{2n-2}| \to \infty$ $(n \to \infty)$, *luego :*

$$S_n(z) \not\to 0 .$$

Si $|z| = 1$, $z = e^{i\theta}$ $(\theta \neq 0)$ *entonces* $\{e^{(2n-2)i\theta}\}$ *no converge* . ■

EJERCICIO 247

Demostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{a^n}{1 + x^2 a^{2n}}$ *converge uniformemente para todo* x, *y que la suma total es igual a*

$$e^a - x^2 e^{a^3} + x^4 e^{a^5} - \ldots . \qquad \text{si } |a| < 1 \text{ y } |x| < 1 .$$

Solución

$$\left| \frac{1}{n!} \cdot \frac{a^n}{1 + x^2 a^{2n}} \right| \leq \frac{|a|^n}{n!} \cdot \frac{1}{1 + x^2 a^{2n}} \leq \frac{|a|^n}{n!} \qquad \text{para todo } n .$$

Como la serie $\sum |a|^n/n!$ *converge, por el criterio M de Weierstrass la serie dada converge uniformemente .*

Si $|a| < 1$ *y* $|x| < 1$ *tenemos :*

$$\frac{1}{n!} \frac{a^n}{1 + x^2 a^{2n}} = \frac{a^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x^2 a^{2n})^k ,$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{a^n}{n!} (-1)^k (x^2 a^{2n})^k \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a|^n}{n!} \frac{1}{1 - x^2 a^{2n}} ,$$

la última converge comparándola con la serie $\sum |a|^n/n!$ *ya que*

$$x^2 a^{2n} \to 0 \quad (n \to \infty) .$$

Por lo tanto :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{a^n}{1 + x^2 a^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x^2 a^{2n})^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^{2k+1})^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} e^{a^{2k+1}} . \blacksquare$$

EJERCICIO 248

Demostrar que la serie

$$2 \operatorname{sen} \frac{1}{3x} + 4 \operatorname{sen} \frac{1}{9x} + \ldots + 2^n \operatorname{sen} \frac{1}{3^n x} + \ldots .$$

converge absolutamente para todo $x \neq 0$, pero la convergencia no es uniforme en la cercanía del origen.

Solución

(i) De la desigualdad : $|\operatorname{sen} X| \leq |X|$ se tiene :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| 2^n \operatorname{sen} \frac{1}{3^n x} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{3^n |x|} = \frac{1}{|x|} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n < +\infty .$$

(ii) Consideremos un intervalo $(0, a]$. Para cualquier n, aunque sea muy grande, existe $x \in (0, a]$ tal que

$$\operatorname{sen} \frac{1}{3^n x} = 1 \qquad \left(\text{basta tomar } x = \frac{2}{3^n \pi} . \right)$$

Entonces la serie no satisface la condición de Cauchy para la convergencia uniforme en $(0, a]$. ■

EJERCICIO 249

Sea $f_n(x) = x^n (1 - x^n)$, demostrar que :

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \frac{x}{1 - x^2}$ si $|x| < 1$.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(1) = 0$ a pesar de que $\lim_{x \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \infty$.

Solución

(i) Si $|x| < 1$ tenemos :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n (1 - x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

$$= \frac{1}{1 - x} - \frac{1}{1 - x^2} = \frac{x}{1 - x^2} .$$

(ii) $f_n(1) = 0$ para todo n, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(1) = 0$.

En cambio :

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{1 - x^2} = +\infty . \quad ■$$

EJERCICIO 250

(i) Si la suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es acotada, demostrar que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

converge uniformemente a una función continua en $x \geq c > 0$.

(ii) Demostrar que:

$$\lim_{x \to 1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-x} = \log 2.$$

Solución

(i) $$\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^c} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Entonces, $\{1/n^x\}$ *es una sucesión decreciente, y tiende a cero uniformemente en* $x \geq c > 0$. *Por el criterio de Dirichlet la serie converge uniformemente.*

(ii) Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n^x$,

entonces f *es continua en* $[c, \infty)$ $(c > 0)$, *luego:*

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1),$$

o sea:

$$\lim_{x \to 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2. \quad \blacksquare$$

EJERCICIO 251

Sea $\{\mu_n\}$ $(\mu_n \geq 1)$ *una sucesión creciente, consideremos la serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (\mu_n)^{-x}.$$

Demostrar que existe un número a *tal que la serie converge si* $x > a$, *diverge si* $x < a$.

Nótese que a puede ser $\pm \infty$. Si $a = -\infty$ la serie converge para todo x, si $a = +\infty$ la serie diverge para todo x.

Solución

Sea $a = Inf\{ x / \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\mu_n)^{-x} \text{ converge } \}$.

Si $x < a$ *la serie diverge evidentemente .*

Si $x > a$ *existe* y , $a \leq y < x$ *tal que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (\mu_n)^{-y}$ *converge .*

Entonces :

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (\mu_n)^{-x} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\mu_n)^{-y} (\mu_n)^{-(x-y)} .$$

Como $(x-y) > 0$, $\{(\mu_n)^{-(x-y)}\}$ *es una sucesión decreciente :*

$$\frac{1}{(\mu_{n+1})^{(x-y)}} \leq \frac{1}{(\mu_n)^{(x-y)}} \leq 1 \quad (\text{para todo } n) ,$$

por el criterio de Abel la serie converge .

NOTA *Si* $c_n = \frac{1}{n!}$ *entonces* $a = -\infty$,

si $c_n = n!$, $\mu_n = n$ *entonces* $a = +\infty$. ■

EJERCICIO 252

(i) Dada una serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *demostrar que la serie de Dirichlet :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-x}$$

converge uniformemente en $[0, \infty)$.

(ii) Demostrar que :

$$\lim_{x \to 0+} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

en caso de que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converja .*

Solución

(i) $(n+1)^{-x} \leq n^{-x} \leq 1$ *(para todo* $n = 1, 2, 3, \ldots$, *todo* $x \geq 0$ *) .*

Por el criterio de Abel la serie dada converge uniformemente en $[0, \infty)$.

(ii) $a_n n^{-x}$ *es continua en* $x \in [0, \infty)$, *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-x}$ *es una*

función continua en $[0, \infty)$, *luego :*

$$\lim_{x \to 0+} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \quad \blacksquare$$

EJERCICIO 253

(i) Demostrar que la serie $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$ *converge uniformemente en el intervalo* $[1+b, \infty)$ *donde* $b > 0$.

(ii) Demostrar que :

$$\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^x} \quad si \quad x > 1 .$$

(iii) Hallar $\zeta^{(k)}(x)$ *en* $x > 1$.

Solución

(i) El criterio M de Weierstrass .

(ii) $$\frac{\log n}{n^x} \leq \frac{\log n}{n^{1+b}} \quad si \quad x \geq 1+b > 1 .$$

Como la serie $\sum \frac{\log n}{n^{1+b}}$ *converge , entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^x}$ *converge uniformemente en* $[1 + b, \infty)$. *Por lo tanto :*

$$\int_a^x \left[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^t} \right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x \left[-\frac{\log n}{n^t} \right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} - \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a} ,$$

o sea :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a} + \int_a^x \left[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^t} \right] dt ,$$

entonces tenemos :

$$\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^x}$$

ya que $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^x}$ *es una función continua .*

(iii) De la misma manera tenemos :

$$\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^k}{n^x} . \quad \blacksquare$$

EJERCICIO 254

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie convergente , demostrar que la serie :*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

converge uniformemente en $x > 0$.

Solución

Si $x > 0$ *tenemos :*

$$1 \geqslant \frac{1}{x+1} \geqslant \frac{n!}{(x+1)\dots(x+n)} \geqslant \frac{(n+1)!}{(x+1)\dots(x+n)(x+n+1)} .$$

Aplicar el criterio de Abel . ■

EJERCICIO 255

(i) Demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}{n!}$$

converge absoluta y uniformemente en $[1,2]$.

(ii) Demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}{n!} \right|$$

no converge uniformemente en $[1,2]$.

Solución

(i)

$$\frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}{n!} = \frac{x-1}{n}(-1)^{n-1}\{1-(x-1)\}\dots\{1-\frac{x-1}{n-1}\}$$

$$= (-1)^n\left[\{1-(x-1)\}\{1-\frac{x-1}{2}\}\times\dots\times\{1-\frac{x-1}{n-1}\}\right.$$

$$\left. -\{1-(x-1)\}\{1-\frac{x-1}{2}\}\times\dots\times\{1-\frac{x-1}{n-1}\}\{1-\frac{x-1}{n}\}\right] .$$

Entonces , si $x \neq 1$ *tenemos :*

$$\sum_{n=2}^{N}\left|\frac{(x-1)\dots(x-n)}{n!}\right| = \{1-(x-1)\} - \{1-(x-1)\}\{1-\frac{x-1}{2}\}\times\dots\times\{1-\frac{x-1}{N}\}$$

$$\to 2-x \quad (N\to\infty),$$

esto es , la serie converge absolutamente .

Ahora, para todo $x \in [1,2]$, *para todo* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *tenemos :*

$$1 \geq (x-1)\{1-(x-1)\}\ldots\{1-\frac{x-1}{n-1}\} \geq (x-1)\{1-(x-1)\}\ldots\{1-\frac{x-1}{n-1}\}\{1-\frac{x-1}{n}\}.$$

Por el criterio de Abel la serie converge uniformemente en $[1,2]$ *ya que* $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *converge .*

(ii) De (i) :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{(x-1)\ldots(x-n)}{n!}\right| = \begin{cases} 2-x & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

La función límite no es continua en $x = 1$ *a pesar de que la función*

$$\left|\frac{(x-1)\ldots(x-n)}{n!}\right|$$

es continua en $x = 1$, *por lo tanto la convergencia no es uniforme .*■

EJERCICIO 256

Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^a(1+nx^2)}$ *converge uniformemente en* R^1 *si* $a > 1/2$. *¿ Es uniforme la convergencia de la serie en caso de que* $a>0$ *?*

Solución

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{1+nx^2}\right] = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2},$$

entonces $|x/(1+nx^2)|$ *tiene el valor máximo en* $x = \pm 1/\sqrt{n}$, *y su valor máximo es* $1/2\sqrt{n}$, *por lo tanto :*

$$\left|\frac{x}{n^a(1+nx^2)}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}\,n^a} = \frac{1}{2\,n^{a+\frac{1}{2}}},$$

así que la serie converge uniformemente en R^1 *si* $a > \frac{1}{2}$.

Si $|x| \geq c > 0$ *entonces*

$$\frac{x}{n^a(1+nx^2)} \leq \frac{|x|}{n^a\,nx^2} = \frac{1}{n^{a+1}|x|} \leq \frac{1}{c}\,\frac{1}{n^{a+1}}$$

entonces la serie converge uniformemente en $[c,\infty)$ *si* $a > 0$.

Ahora , consideremos un intervalo $[0,b]$, *tomando* $x = \frac{1}{\sqrt{n}} \in [0,b]$ *tenemos :*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \Big/ k^a\left(1 + k\,\frac{1}{n}\right) \;\geqslant\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \Big/ k^a\left(1 + n\,\frac{1}{n}\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a} \;>\; \frac{1}{2\sqrt{n}} \int_1^n \frac{dt}{t^a} = \frac{1}{2(1-a)\sqrt{n}} \left\{ n^{1-a} - 1 \right\}$$

$$\to \begin{cases} +\infty & si \quad a < \dfrac{1}{2} \\ 1 & si \quad a = \dfrac{1}{2} \end{cases},$$

entonces la convergencia de la serie no es uniforme en $[0, b]$ *si* $a \leqslant 1/2$.

[*Si la convergencia fuera uniforme el límite sería continuo en* 0, *o sea*

$$\lim_{x \to o} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^a(1+n\,x^2)} = 0 \qquad (absurdo\ !)\ .\ ]$$

EJERCICIO 257

Sea

$$f(x) = \frac{b_1}{x+1} + \frac{b_2}{(x+1)(x+2)} + \ldots + \frac{b_n}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)} + \ldots .$$

donde $x \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *Demostrar que existe* $r_o \geqslant 0$ *tal que la serie converge si* $x > r_o$, *diverge si* $x < r_o$.

NOTA: Si $r_o = +\infty$ *la serie diverge para todo* x. *Si* $r_o = 0$ *la serie converge para todo* $x > 0$.

Solución

Sea $r_o = Inf \{ x \geqslant 0 \,/\, la\ serie\ converge\ en\ x \}$

entonces la serie diverge si $x < r_o$.

Si $x > r_o$ *existe* x_1, $x > x_1 \geqslant r_o$ *tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(x_1+1)\ldots(x_1+n)} \qquad converge\ .$$

De la desigualdad :

$$\frac{b_n}{(x+1)\ldots(x+n)} \leqslant \frac{b_n}{(x_1+1)\ldots(x_1+n)} \qquad (para\ todo\ n)$$

se tiene que la serie dada converge uniformemente en $x \geqslant x_1$, *luego* $f(x)$ *es continua en* x, *y*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(x+1)\ldots(x+n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to\infty} \frac{b_n}{(x+1)\ldots(x+n)} = 0 .$$

■

EJERCICIO 258

Demostrar que la serie

$$\sum_{n=o}^{\infty} \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2} \right]$$

converge puntualmente, pero no uniformemente en $[0,1]$.

Solución

Si $x = 1$:

$$\sum_{n=o}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right\} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \log 2 .$$

Si $0 \leq x < 1$, *las dos series :*

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad y \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2n+2}$$

convergen, luego la serie dada converge .

Si $0 \leq x < 1$ *tenemos :*

$$\sum_{n=o}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} \quad , \quad \frac{1}{2} \sum_{n=o}^{\infty} x^n = \frac{1}{2(1-x)} .$$

Integrando las dos series anteriores se tiene :

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_o^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} ,$$

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2(n+1)} = -\frac{1}{2} \log (1-x) ,$$

entonces :

$$\sum_{n=o}^{\infty} \left\{ \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2} \right\} = \frac{1}{2} \log (1+x) \to \frac{1}{2} \log 2 \quad (x \to 1) .$$

Como la función límite de la serie dada no es continua en $x = 1$, *la convergencia no es uniforme en* $[0,1]$. ■

EJERCICIO 259

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas en $[0, 1]$, si $f_n \to f$ uniformemente en $[0, 1]$, demostrar:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx .$$

Solución

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx = \int_0^1 f_n(x)\,dx - \int_{1-\frac{1}{n}}^1 f_n(x)\,dx ,$$

como $\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \int_0^1 f(x)\,dx$, *entonces basta demostrar que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{1-\frac{1}{n}}^1 f_n(x)\,dx = 0 .$$

Además f_n es acotada y $f_n \to f$ es uniforme en $[0, 1]$, entonces $\{f_n\}$ es uniformemente acotada en $[0, 1]$ (Ejercicio 192), o sea que existe M tal que

$$|f_n(x)| \leq M \quad \text{para todo } n \text{ y todo } x \in [0, 1] ,$$

luego:

$$\left| \int_{1-\frac{1}{n}}^1 f_n(x)\,dx \right| \leq \int_{1-\frac{1}{n}}^1 |f_n(x)|\,dx \leq M \int_{1-\frac{1}{n}}^1 dx = \frac{M}{n} \to 0 . \blacksquare$$

EJERCICIO 260

Si la serie $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$ converge uniformemente en $[0, 2\pi]$, demostrar que:

(i) $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\,dx$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n)^2$ *converge.*

Solución

Obsérvese que $f(x)$ es continua en $[0, 2\pi]$, luego $f(x)$ es Riemann-integrable.

(i) Como $\operatorname{sen} nx$ *es acotada, entonces la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} nx$$

converge uniformemente a $(f(x) \operatorname{sen} nx)$ *en* $[0, 2\pi]$. *Luego:*

$$\int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} b_k \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} nx \, dx .$$

Pero como:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} nx \, dx = 0 \quad (n \neq k) \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} [\operatorname{sen} nx]^2 \, dx = \pi \end{cases} \tag{76}$$

entonces se tiene que

$$\pi b_n = \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx .$$

(ii)

$$0 \leq \int_0^{2\pi} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{sen} kx \right|^2 dx$$

$$= \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx + \sum_{k,b=1}^{n} b_k b_b \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} bx \, dx$$

$$- 2 \sum_{k=1}^{n} \int_0^{2\pi} f(x) b_k \operatorname{sen} kx \, dx \quad (\text{por } (76))$$

$$= \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx + \pi \sum_{k=1}^{n} (b_k)^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} b_k \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} kx \, dx$$

$$= \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx + \pi \sum_{k=1}^{n} (b_k)^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} b_k (\pi b_k) \quad (\text{por } (i))$$

$$= \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx - \pi \sum_{k=1}^{n} (b_k)^2 .$$

Por lo tanto:

$$\pi \sum_{k=1}^{n} (b_k)^2 \leq \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx ,$$

entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k)^2$ *converge.* ■

EJERCICIO 261

Si la serie $f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n \cos nx$ *converge uniformemente en* $[0, 2\pi]$ *demostrar que :*

(i) $a_n = \frac{1}{\pi} \int_o^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n \neq 0)$, $a_o = \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} f(x) \, dx$.

(ii) $\sum_{n=o}^{\infty} (a_n)^2$ *converge .*

Sugerencia

Similar al ejercicio 260 . ■

EJERCICIO 262

Sea f *integrable en* $[0, 2\pi]$ *, sean*

$$b_n = \int_o^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$a_n = \int_o^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) .$$

demostrar que las dos series :

$$\sum_{n=o}^{\infty} (a_n)^2 \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n)^2 \quad \text{convergen .}$$

Sugerencia

Similar a (ii), Ejercicio 260 . ■

EJERCICIO 263

Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ *converge a* $f(x)$ *uniformemente en* $[0, 2\pi]$ *y si* f *es derivable y* f' *es continua, demostrar que* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *converge .*

Solución

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \quad (\text{uniformemente en } [0, 2\pi]) .$$

Del ejercicio 261 :

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_o^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}\ sen\ kx\ \ f(x)\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{k}\ sen\ kx\ \ f'(x)\ dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\frac{1}{k}\int_0^{2\pi} f'(x)\ sen\ kx\ dx = -\frac{1}{k}\ b'_k$$

donde

$$b'_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\ sen\ kx\ dx\ .$$

Del ejercicio 262 se tiene que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(b'_k)^2$ *converge, entonces*

$$\sum_{k=1}^{N}|a_k| = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\ |b'_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2}}\ \sqrt{\sum_{k=1}^{N}(b'_k)^2}\ .$$

o sea que $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ *converge.* ■

EJERCICIO 264 ⊕

Sea $\{a_n\}$ *una sucesión decreciente de términos positivos. Demostrar que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ sen\ nx$ *converge uniformemente en* R^1 *si y sólo si* $n\,a_n \to 0$ *cuando* $n \to \infty$.

Solución

[1] Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ sen\ nx$ *converge uniformemente en* R^1. *Dado* $\epsilon > 0$ *existe* N *tal que si* $n \geq N$ *tenemos:*

$$\left|\sum_{k=n}^{2n} a_k\ sen\ kx\right| < \epsilon \quad \text{para todo} \quad x \in R^1.$$

Sea $x = \frac{\pi}{4n}$ *(ó* $2nx = \pi/2$*) entonces:*

$$kx \leq \frac{\pi}{2} \qquad para \quad k = n, n+1, \ldots, 2n\ ,$$

luego:

$$0 < \sum_{k=n}^{2n} a_k\ sen\ kx < \epsilon.$$

Utilizando la desigualdad conocida:

$$sen\ t \geq \frac{2}{\pi}\ t \qquad cuando \quad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]\ ,$$

se tiene :

$$\epsilon > \sum_{k=n}^{2n} a_k \operatorname{sen} kx \geqslant \sum_{k=n}^{2n} a_k \frac{2}{\pi} kx$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi} x\, a_{2n} \sum_{k=n}^{2n} k > \frac{2\, a_{2n}}{\pi} \frac{\pi}{4n} \frac{3}{2} n^2 = \frac{3}{8} a_{2n} (2n) ,$$

o sea :

$$(2n)\, a_{2n} < \frac{8}{3} \epsilon . \qquad (i)$$

Como $\{a_n\}$ es decreciente se tiene :

$$a_{2n+1} (2n+1) \leqslant a_{2n} (2n+1) = (2n)\, a_{2n} (1 + \frac{1}{2n}) < \frac{8}{3} \epsilon (1 + \frac{1}{2n}). \qquad (ii)$$

De (i) y (ii) se tiene que $\lim_{n\to\infty} n\, a_n = 0$.

[II] Ahora supongamos que $\lim_{n\to\infty} n\, a_n = 0$. Dado $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$n \geqslant N \text{ implica } n\, a_n < \epsilon . \qquad (iii)$$

Teniendo en cuenta la periodicidad de la función $\operatorname{sen} nx$ $(n = 1, 2, \ldots)$ vamos a demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx$ converge uniformemente en $[0, \pi]$.

Para $x \in [0, \pi]$, sea m la parte entera de $\pi/2x$ ($m = [\pi/2x]$) entonces para $n \geqslant N$ tenemos en general :

$$\sum_{k=n+1}^{n+q} a_k \operatorname{sen} kx = \sum_{k=n+1}^{m} a_k \operatorname{sen} kx + \sum_{k=m+1}^{n+q} a_k \operatorname{sen} kx \qquad (iv)$$

donde la primera suma no aparece si $m < n$, y la segunda suma no aparece si $n + q \leqslant m$.

⊗ Si $k \leqslant m$, $kx \leqslant \pi/2$, luego :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \operatorname{sen} kx \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} a_k\, kx = x \sum_{k=n+1}^{m} k\, a_k$$

$$< \epsilon x (m - n) < \frac{\pi}{2} \epsilon . \qquad (v)$$

⊗ Si $k > m$ entonces :

$$\left| \sum_{k=m+1}^{m+q} a_k \operatorname{sen} kx \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{m+q} a_k \{S_k(x) - S_{k-1}(x)\} \right|$$

$$\leq \left| \sum_{k=m+1}^{m+q-1} S_k(x)\,(a_k - a_{k+1}) \right| + \left| a_{m+q} S_{m+q}(x) - a_{m+1} S_m(x) \right|$$

$$\leq M(x) \sum_{k=m+1}^{m+q-1} (a_k - a_{k+1}) + M(x)\,(a_{m+q} + a_{m+1}) = 2\,M(x)\,a_{m+1} \qquad (vi)$$

donde

$$S_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{sen} jx = \operatorname{sen} \frac{kx}{2} \operatorname{sen}\left(k + \frac{1}{2}\right) x \Big/ \operatorname{sen} \frac{x}{2} ,$$

$$M(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} \qquad (vii)$$

Entonces :

$$\left| \sum_{k=m+1}^{m+q} a_k \operatorname{sen} kx \right| \leq \frac{2}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} a_{m+1} < \frac{2}{\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{4(m+1)}\right]} a_{m+1} \qquad \text{\# Nota}$$

$$< \pi \frac{4(m+1)}{\pi} a_{m+1} < 4\epsilon . \qquad (viii)$$

De (v) y (viii) tenemos para todo $n \geq N$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+q} a_k \operatorname{sen} kx \right| < \frac{\pi}{2}\epsilon + 4\epsilon = \left(\frac{\pi}{2} + 4\right)\epsilon$$

para todo $x \in [0, \pi]$

esto es , la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen} kx$ *es uniforme .*

\# Nota

Utilizar : $m + 1 > \frac{\pi}{2x}$ ó $\frac{x}{2} > \frac{\pi}{4(m+1)}$

y la desigualdad :

$$\operatorname{sen} t \geq \frac{2}{\pi} t \quad \text{para} \quad t = \frac{\pi}{4(m+1)} .$$

EJERCICIO 265

Demostrar en $[0, \pi]$ *que :*

(i) $\lim_{n\to\infty} n\, e^{-n \operatorname{sen}\theta} = 0 \quad (\theta \neq 0, \pi)$.

(ii) La convergencia en (i) no es uniforme ni acotada.

(iii) ¿ Es válida la relación siguiente ?

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} n\, e^{-n \operatorname{sen}\theta}\, d\theta = \int_0^{\pi} \lim_{n\to\infty} n\, e^{-n \operatorname{sen}\theta}\, d\theta .$$

Solución

(i), (ii) Evidente.

(iii) $\int_0^{\pi} \lim_{n\to\infty} n\, e^{-n \operatorname{sen}\theta}\, d\theta = \int_0^{\pi} 0\, d\theta = 0.$

$$\int_0^{\pi} n\, e^{-n \operatorname{sen}\theta}\, d\theta \geq \int_0^{\pi} n\, e^{-n\theta}\, d\theta = \{1 - e^{-n\pi}\} \to 1 ,$$

esto es,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} n\, e^{-n \operatorname{sen}\theta}\, d\theta \neq \int_0^{\pi} \lim_{n\to\infty} n\, e^{-n \operatorname{sen}\theta}\, d\theta .$$

■

EJERCICIO 266

Demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \operatorname{sen}\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

converge uniformemente en cualquier intervalo acotado, pero no converge uniformemente en R^1.

Solución

[1] Consideremos un intervalo $[-a, a]$.

$$\operatorname{sen}\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \operatorname{sen}\left(1 + \frac{x}{n+1}\right) = 2 \cos\left[1 + \frac{x(2n+1)}{2n(n+1)}\right] \operatorname{sen} \frac{x}{2n(n+1)}$$

luego :

$$\left|\operatorname{sen}\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \operatorname{sen}\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)\right| \leq 2 \left|\operatorname{sen} \frac{x}{2n(n+1)}\right| \leq \frac{|x|}{n(n+1)} \leq \frac{a}{n(n+1)} .$$

Entonces la suma parcial de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

es uniformemente acotada. Como $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ es decreciente y tiende a cero, por el criterio de Dirichlet la serie converge uniformemente en $[-a, a]$.

[II] Sea N cualquier número natural dado, si $m > N$ para $x = \pi m(m-1)$ tenemos:

$$\frac{(-1)^m}{\sqrt{m}} \operatorname{sen}\left(1 + \frac{x}{m}\right) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{m}}(-1)^{m+1} \operatorname{sen} 1 = -\frac{\operatorname{sen} 1}{\sqrt{m}},$$

$$\frac{(-1)^{m+1}}{\sqrt{m+1}} \operatorname{sen}\left(1 + \frac{x}{m+1}\right) = \frac{(-1)^{m+1}}{\sqrt{m+1}}(-1)^m \operatorname{sen} 1 = -\frac{\operatorname{sen} 1}{\sqrt{m+1}},$$

en general:

$$\frac{(-1)^{m+k}}{\sqrt{m+k}} \operatorname{sen}\left(1 + \frac{x}{m+k}\right) = -\frac{1}{\sqrt{m+k}} \operatorname{sen}\left\{1 + \pi \frac{k(k-1)}{m+k}\right\} \qquad (i)$$

Si $k \leq \frac{1}{2}\sqrt{m}$ entonces $1 - \pi \frac{k(k-1)}{m+k} < 1 + \frac{\pi}{4}$.

por lo tanto:

$$\operatorname{sen}\left\{1 + \pi \frac{k(k-1)}{m+k}\right\} > \operatorname{sen} 1. \qquad (ii)$$

Sea $N_o = \frac{1}{2}\sqrt{m}$ entonces de (i) y (ii) tenemos:

$$\left|\sum_{k=0}^{N_o} \frac{(-1)^{m+k}}{\sqrt{m+k}} \operatorname{sen}\left(1 + \frac{x}{m+k}\right)\right| > \frac{\operatorname{sen} 1}{\sqrt{m}} + \frac{\operatorname{sen} 1}{\sqrt{m+1}} + \ldots + \frac{\operatorname{sen} 1}{\sqrt{m+N_o}}$$

$$> (\operatorname{sen} 1)\frac{N_o}{\sqrt{m+N_o}} = \frac{(\operatorname{sen} 1)}{2}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m+\frac{1}{2}\sqrt{m}}} \to \frac{\operatorname{sen} 1}{2} \quad (m \to \infty).$$

Esto es, la serie no satisface la condición de Cauchy para la convergencia uniforme en R^1. ■

EJERCICIO 267

Sea (x) la parte fraccionaria de x, sea

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2},$$

encontrar todos los puntos de discontinuidad de f.

Solución

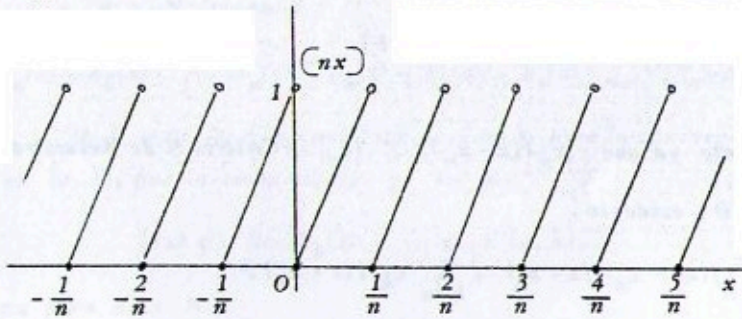
Primero, se observa que la serie converge uniformemente en R^1 *(el criterio M de Weierstrass).*

Para cada n fijo, la función (nx) *es discontinua en*

$$0\ ,\ \pm\frac{1}{n}\ ,\ \pm\frac{2}{n}\ ,\ \pm\frac{3}{n}\ ,\ \ldots \qquad \textit{(ver la figura)}$$

entonces f es continua en todos los números irracionales.

Sea $x_0 = p/q$ *(en forma irreducible, p, q enteros, q > 0),*



(nx) *es discontinua en* x_0 *si q divide a n. Tenemos entonces:*

$$f(x) = \sum_{q\nmid n} \frac{(nx)}{n^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(kqx)}{k^2 q^2} \qquad (i)$$

donde la primera suma representa una función continua en x_0.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(kqx_0)}{k^2 q^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(kp)}{k^2 q^2} = \sum 0 = 0\ ,$$

$$\lim_{x\to x_0^-} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(kqx)}{k^2 q^2} = \lim_{x\to x_0^-} \left\{ \frac{(qx)}{q^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(kqx)}{k^2 q^2} \right\}$$

$$\geq \lim_{x\to x_0^-} \frac{(qx)}{q^2} = \frac{1}{q^2} > 0\ .$$

Esto es, la segunda suma en (i) es una función discontinua en $x = x_0$, *por lo tanto f es discontinua en* $x = x_0$, *o sea que cualquier número racional es punto de discontinuidad de la función f.* ■

EJERCICIO 268

Sea $I(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Si $\{x_n\}$ *es una sucesión de diferentes puntos de* (a, b) *y si* $\sum |c_n|$ *converge, demostrar que:*

(i) la serie $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - x_n)$ *converge uniformemente en* $[a, b]$.

(ii) $f(x)$ *es continua en* $x \neq x_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(iii) El salto de f *en* x_n *es* c_n.

(iv)$^{\oplus}$ f *es de variación acotada en* $[a, b]$.

Solución

(i) Evidente ya que $|c_n I(x - x_n)| \leq |c_n|$. *(Criterio M de Weierstrass)*

(ii) De (i), evidente.

(iii) $$f(x) = c_n I(x - x_n) + \sum_{k \neq n} c_k I(x - x_k).$$

Como $\sum_{k \neq n} c_k I(x - x_k)$ *es continua en* x_n, *entonces el salto de* f *en* x_n *es igual a* c_n, *o sea*

$$f(x_n+) - f(x_n-) = f(x_n+) - f(x_n) = c_n .$$

(iv) Sea

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| I(x - x_k)$$

entonces g *es creciente.*

$$b(x) = g(x) - f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (|c_k| - c_k) I(x - x_k)$$

es también creciente, luego $f(x) = g(x) - b(x)$ *es de variación acotada.* ∎

EJERCICIO 269 $^{\oplus}$

Sea $\{g_n\}$ *una sucesión de funciones de variación acotada en* $[a, b]$ *tal que:*

dado $\epsilon > 0$ *existe* N *tal que*

$$n, k > N \quad \text{implica} \quad V(g_n - g_k) < \epsilon .$$

Demostrar que existe una función de variación acotada, g, tal que

$$V(g_n - g) \to 0 .$$

NOTA : $V(\ldots)$ indica la variación total de $(\ldots)$ en $[a, b]$.

Solución

Sea $b_n(x) = g_n(x) - g_n(a)$ *entonces :*

$$V(b_n - b_k) = V(g_n - g_k - g_n(a) + g_k(a)) = V(g_n - g_k),$$

luego, si $n, k > N$ *tenemos :*

$$|b_n(x) - b_k(x)| = |b_n(x) - b_k(x) - b_n(a) + b_k(a)| \leq V(b_n - b_k) < \epsilon .$$

Esto es, $\{b_n\}$ *satisface la condición de Cauchy para la convergencia uniforme en* $[a, b]$, *por lo tanto existe* g *tal que*

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} b_n(x) \qquad x \in [a, b].$$

Tenemos para $n > N$ *:*

$$V(g_n - g) = V(b_n - g + g_n(a)) = V(b_n - g) \leq \epsilon$$

ya que

$$V(b_n - b_k) < \epsilon \qquad \text{para todo } n, k > N .$$

Esto es,

$$V(g_n - g) \to 0 \quad (n \to \infty),$$

además, g es de variación acotada ya que $g = g_n - (g_n - g)$. ∎

EJERCICIO 270 ⊕

Sea f continua en $[a, b]$, si $\{g_n\}$ es una sucesión de funciones de variación acotada tales que

(A) $V(g_n) \leq M$ *(para todo* $n = 1, 2, \ldots$, M *es una constante).*

(B) $g_n(x) \to g(x)$ *para todo* $x \in [a, b]$,

demostrar que :

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x)\, dg_n(x) = \int_a^b f(x)\, dg(x) .$$

NOTA Si $\{g_n\}$ satisface la condición (A) se dice que la sucesión es de variación uniformemente acotada.

Solución

(i) Dada una partición del intervalo $[a, b]$:

$$a = x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_m = b$$

tenemos :

$$\sum_{k=1}^{m} |g_j(x_k) - g_j(x_{k-1})| \leq V(g_j) \leq M \quad (\text{para todo } j).$$

Tomando límite cuando $j \to \infty$ *tenemos :*

$$\sum_{k=1}^{m} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq M,$$

o sea :

$$V(g) \leq M.$$

(ii)
$$\left| \int_a^b f(x)\, dg(x) - \int_a^b f(x)\, dg_j(x) \right|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{m} \left\{ \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, dg(x) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, dg_j(x) \right\} \right|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{m} \left[\int_{x_{k-1}}^{x_k} \{f(x) - f(x_k)\}\, dg(x) + f(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} dg(x) \right.\right.$$

$$\left.\left. - f(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} dg_j(x) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} \{f(x) - f(x_k)\}\, dg_j(x) \right] \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} \{f(x) - f(x_k)\}\, dg(x) \right|$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} |f(x_k)| |g(x_k) - g(x_{k-1}) - g_j(x_k) + g_j(x_{k-1})|$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} \{f(x) - f(x_k)\}\, dg_j(x) \right|. \qquad (77)$$

Como f *es uniformemente continua en* $[a, b]$, *dado* $\epsilon > 0$ *si* la norma de la partición *es suficientemente pequeña* #Nota *tenemos :*

$$\sum_{k=1}^{m} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} \{f(x) - f(x_k)\} dg(x) \right| \leq \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x) - f(x_k)| \, dV_g(x)$$

$$< \epsilon \, V(g) \leq \epsilon \, M \,, \qquad (78)$$

de la misma manera:

$$\sum_{k=1}^{m} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} \{f(x) - f(x_k)\} \, dg_j(x) \right| \leq \epsilon \, V(g_j) \leq \epsilon \, M \,. \qquad (79)$$

También:

$$g_j(x_k) \to g(x_k) \quad (j \to \infty) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

entonces existe N tal que

$$j > N \text{ implica } |g_j(x_k) - g(x_k)| < \frac{\epsilon}{m} \quad (\text{para todo } k = 0, 1, \ldots, m,)$$

por lo tanto:

$$\sum_{k=1}^{m} |f(x_k)| |g(x_k) - g(x_{k-1}) - g_j(x_k) + g_j(x_{k-1})|$$

$$\leq C \sum_{k=1}^{m} \left\{ \frac{\epsilon}{m} + \frac{\epsilon}{m} \right\} = 2 C \epsilon. \qquad (80)$$

donde C es una cota de f en $[a, b]$.

De (77), (78), (79) y (80), si $j > N$ *tenemos:*

$$\left| \int_a^b f(x) \, dg(x) - \int_a^b f(x) \, dg_j(x) \right| < 2 \epsilon (M + C) \,,$$

o sea:

$$\int_a^b f(x) \, dg_j(x) \to \int_a^b f(x) \, dg(x) \,. \quad \blacksquare$$

* *Nota*

Dado $\epsilon > 0$ *existe* δ *tal que*

$$|t - s| < \delta \quad \text{implica} \quad |f(t) - f(s)| < \epsilon \,.$$

Tomemos: $\underset{k}{\text{Máximo}} \, (x_k - x_{k-1}) < \delta$.

EJERCICIO 271 ⊕

Sea f_n derivable en (a, b), si la suma parcial de la serie $\sum f_n'(x)$ es uniformemente acotada y si $\sum f_n(x)$ converge puntualmente en (a, b), demostrar que $\sum f_n$ converge uniformemente en (a, b). (Bendixon)

Solución

Sea M tal que

$$\left| \sum_{n=1}^{m} f_n'(x) \right| \leq M \quad \text{para todo } x \text{, todo } m .$$

Dado $\epsilon > 0$ consideremos una partición del intervalo $[a, b]$:

$$a = x_0 , x_1 , \ldots , x_k , \ldots , x_m = b$$

tal que $x_k - x_{k-1} < \epsilon/4M$ para todo k.

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_k)$ converge para todo k, existe N tal que

$$n > N \quad \text{implica} \quad \left| \sum_{j=n+1}^{n+q} f_j(x_k) \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad \begin{pmatrix} \text{para todo } k = 0, 1, .., m \\ \text{para todo } q = 1, 2, \ldots . \end{pmatrix} \tag{i}$$

Si $x \in (a, b)$ entonces $x \in [x_{k-1}, x_k]$ para algún k, aplicando el teorema del valor medio a la función $\sum_{j=n+1}^{n+q} f_j$ se tiene :

$$\sum_{j=n+1}^{n+q} f_j(x) - \sum_{j=n+1}^{n+q} f_j(x_{k-1}) = \sum_{j=n+1}^{n+q} f_j'(\theta)\,(x - x_{k-1}) ,$$

luego :

$$\left| \sum_{j=n+1}^{n+q} f_j(x) \right| \leq \left| \sum_{j=n+1}^{n+q} f_j(x_{k-1}) \right| + \left| \sum_{j=n+1}^{n+q} f_j'(\theta) \right| |x - x_{k-1}|$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} + 2M \frac{\epsilon}{4M} = \epsilon . \quad \text{\# Nota}$$

\# Nota

$$\left| \sum_{j=n+1}^{n+q} f_j' \right| = \left| \sum_{j=1}^{n+q} f_j' - \sum_{j=1}^{n} f_j' \right|$$

$$\leq \left| \sum_{j=1}^{n+q} f_j' \right| + \left| \sum_{j=1}^{n} f_j' \right| \leq 2M . \quad \blacksquare$$

EJERCICIO 272

Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

una serie de potencias convergente en $|x| < r$ $(r \neq 0)$. *Si* $f(x) = 0$ *para todo* $|x| < r$ *demostrar que :*

$$a_n = 0 \quad , \quad n = 1,2,3, \ldots \quad .$$

Solución

$a_0 = 0$ *ya que* $f(0) = 0 = a_0$.

Supongamos que $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$ *, entonces :*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \ldots$$

$$= x^n \{ a_n + a_{n+1} x + a_{n+2} x^2 + \ldots \} .$$

La función $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} x^k$ *es continua en* $|x| < r$ *, luego :*

$$\lim_{x \to 0} \{ \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} x^k \} = 0 .$$

Si $a_n \neq 0$ *existe* δ *tal que*

$$|x| < \delta \quad implica \quad | \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} x^k | < |a_n| ,$$

por lo tanto :

$$| f(\tfrac{\delta}{2}) | = (\tfrac{\delta}{2})^n | (a_n + \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} (\tfrac{\delta}{2})^k) |$$

$$\geq (\tfrac{\delta}{2})^n \{ |a_n| - | \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} (\tfrac{\delta}{2})^k | \} > 0 \quad (absurdo !)$$

entonces se tiene que $a_n = 0$. *Luego :*

$$a_n = 0 \quad para\ todo \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad . \ \blacksquare$$

EJERCICIO 273

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *tal que*

$$a_n + A\, a_{n-1} + B\, a_{n-2} = 0 \quad (n = 2,3,4, \ldots , A, B \ son\ constantes)$$

Demostrar que para todo x *en que la serie converge , la suma total es igual .*

a

$$\frac{a_o + (a_1 + A\,a_o)\,x}{1 + Ax + Bx^2} .$$

Solución

Sea $b_n = a_n x^n$ *entonces se tiene :*

$$b_n + Ax\,b_{n-1} + B\,x^2\,b_{n-2} = 0 ,$$

o sea :

$$b_n - c\,b_{n-1} = d(b_{n-1} - c\,b_{n-2})$$

donde

$$c + d = -Ax , \quad cd = B\,x^2 .$$

Por lo tanto :

$$b_n - c\,b_{n-1} = d^{n-1}(b_1 - c\,b_o) ,$$

de donde :

$$\sum_{n=1}^{N} b_n - c \sum_{n=1}^{N} b_{n-1} = (b_1 - c\,b_o) \sum_{n=1}^{N} d^{n-1}$$

$$= (b_1 - c\,b_o)\,\frac{1 - d^N}{1 - d} .$$

Si la serie converge ,

$$\sum_{n=1}^{N} b_n \to S - b_o , \quad \sum_{n=1}^{N} b_{n-1} \to S , \quad d^N \to 0 \quad (N \to \infty) ,$$

luego :

$$(S - b_o) - c\,S = \frac{b_1 - c\,b_o}{1 - d} ,$$

o sea :

$$S = \frac{b_1 - c\,b_o}{(1 - c)(1 - d)} + \frac{b_o}{1 - c}$$

$$= \frac{b_1}{1 - (c+d) + cd} + \frac{b_o\,\{1 - (c+d)\}}{1 - (c+d) + cd} = \frac{a_1 x + a_o(1 + Ax)}{1 + Ax + Bx^2} . \blacksquare$$

EJERCICIO 274

Demostrar que :

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b} + \ldots . = \int_o^1 \frac{t^{a-1}}{1 + t^b}\,dt \quad (a , b > 0).$$

Solución

$$\frac{t^{a-1}}{1+t^b} = t^{a-1}\{1 - t^b + t^{2b} - \ldots + (-1)^n t^{nb} + \ldots \},$$

si $x < 1$ *tenemos :*

$$\int_0^x \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\, dt = \frac{x^a}{a} - \frac{x^{a+b}}{a+b} + \frac{x^{a+2b}}{a+2b} - \frac{x^{a+3b}}{a+3b} + \ldots .$$

Tomando límite cuando $x \to 1^-$ *:*

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\, dt = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b} + \ldots .$$

puesto que la serie del segundo miembro converge (Teorema de Abel). ■

EJERCICIO 275

(i) Demostrar el siguiente desarrollo en $|x| < 1$ *:*

$$\frac{1}{2}\{\log(1-x)\}^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}(1+\frac{1}{2})x^3 + \frac{1}{4}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})x^4 + \ldots .$$

(ii) Demostrar que el resultado es válido en $x = -1$.

Solución

(i) $\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots .$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

luego :

$$\frac{1}{1-x}\log(1-x) = x + (1+\frac{1}{2})x^2 + (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})x^3 + \ldots ,$$

$$\frac{1}{2}\{\log(1-x)\}^2 = \int_0^x \frac{1}{1-t}\log(1-t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + (1+\frac{1}{2})\frac{x^3}{3} + (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})\frac{x^4}{4} + \ldots .$$

(ii) Si $x = -1$ *se tiene la serie :*

$$\frac{1}{2} - (1 + \frac{1}{2})\frac{1}{3} + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})\frac{1}{4} - \ldots + (-1)^n(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1})\frac{1}{n} + \ldots$$

Pero :

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} = \log n + C + O(\frac{1}{n}) ,$$

entonces :

$$\Sigma (-1)^n (1 + \ldots + \frac{1}{n-1})\frac{1}{n} = \Sigma (-1)^n \frac{\log n}{n} + \Sigma (-1)^n \frac{C}{n} + \Sigma O(\frac{1}{n^2})$$

por lo tanto la serie converge . Del teorema de Abel , el desarrollo es válido en $x = -1$ *:*

$$\frac{1}{2}\log 2 = \frac{1}{2} - (1 + \frac{1}{2})\frac{1}{3} + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})\frac{1}{4} - \ldots .$$ ■

EJERCICIO 276

Supongamos que las dos series Σa_n *y* $\Sigma n a_n$ *convergen . Sea* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *, demostrar que :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n = \lim_{x \to 1} \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} .$$

Solución

$$\frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \frac{\sum_0^{\infty} a_n (1 - x^n)}{1 - x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_n (1 - x^n)}{n(1 - x)} ,$$

$$\frac{1 - x^n}{n(1 - x)} - \frac{1 - x^{n+1}}{(n+1)(1 - x)} = \frac{(1 - x)\{1 + x + \ldots + x^{n-1} - n x^n\}}{n(n+1)(1 - x)}$$

$$= \frac{(1 - x^n) + (x - x^n) + \ldots + (x^{n-1} - x^n)}{n(n+1)} > 0 . \left[\begin{matrix} si \\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{matrix}\right]$$

Aplicando el criterio de Abel# *Nota , la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_n (1 - x^n)}{n(1 - x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_n}{n}(1 + x + \ldots + x^{n-1})$$

converge uniformemente en $[0, 1]$ *, entonces* $\frac{f(1) - f(x)}{1 - x}$ *es continua en* $x = 1$ *:*

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \Sigma_1^{\infty} n a_n .$$

Nota

$$\frac{1 - x^n}{n(1 - x)} = \frac{1 + x + \ldots + x^{n-1}}{n} \leqslant 1 \quad en \quad x \in [0, 1] .$$ ■

CAPITULO VI

Algunas aplicaciones de sucesiones de funciones

§ 39 Teorema de aproximación de Weierstrass

Según Weierstrass, una función continua en un intervalo compacto puede ser aproximada por polinomios tanto como se quiera, o sea:

TEOREMA 42 (Teorema de aproximación de Weierstrass)

Sea f continua en $[a, b]$, dado $\epsilon > 0$ cualquiera existe un polinomio P tal que

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon \qquad \text{para todo } x \in [a, b]$$

También puede expresarse como sigue:

Dada una función f, continua en $[a, b]$, existe una sucesión de polinomios $\{f_n\}$ tal que

$$f_n \to f \quad \text{uniformemente en } [a, b].$$

La demostración del teorema 42 es sumamente sencilla si utilizamos algunos conocimientos sobre series de Fourier (Teorema de Féjer), sin embargo la demostración directa es siempre complicada. Aquí daremos dos demostraciones totalmente distintas.

Demostración

Para mayor sencillez supongamos que:

$$[a, b] = [0, 1], \quad \text{\# Nota 1}$$

y

$$f(0) = f(1) = 0. \quad \text{\# Nota 2}$$

Sea

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 1] \end{cases}$$

y se tiene que f^* es uniformemente continua en $R^1 = (-\infty, \infty)$.

Consideremos el siguiente polinomio :

$$Q_n(x) = c_n \cdot (1 - x^2)^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (1)$$

donde la constante c_n *es determinado por :*

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\, dx = 1 , \qquad (2)$$

o sea

$$c_n = c_n \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n\, dx = 2\, c_n \int_{0}^{1} (1 - x^2)^n\, dx \qquad (x = \operatorname{sen} \theta)$$

$$= 2\, c_n \int_{0}^{\pi/2} \cos^{2n+1} \theta\, d\theta = 2\, \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}\, c_n = 1 ,$$

luego tenemos :

$$c_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \qquad (3)$$

Utilizando la desigualdad # Nota 3 *:*

$$(1 - x^2)^n \geq 1 - nx^2 \qquad x \in [-1, 1]$$

tenemos la siguiente evaluación de los coeficientes c_n *:*

$$2 \int_{0}^{1} (1 - x^2)^n\, dx \geq 2 \int_{0}^{1} (1 - nx^2)\, dx$$

$$\geq 2 \int_{0}^{1/\sqrt{n}} (1 - nx^2)\, dx = \frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} ,$$

o sea :

$$c_n < \sqrt{n} . \qquad (4)$$

Sea

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x + t)\, Q_n(t)\, dt , \qquad (5)$$

por un cambio de variable $x + t = s$ *se tiene :*

$$P_n(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(s)\, Q_n(s - x)\, ds = \int_{0}^{1} f(s)\, Q_n(s - x)\, ds ;$$

esto es, $P_n(x)$ *es un polinomio de* x *. Ahora, vamos a demostrar que*

$P_n \to f$ *uniformemente en* $[0, 1]$.

Por la continuidad uniforme de f^*, *dado* $\epsilon > 0$ *existe* δ *tal que*

$|t| < \delta$ *implica*

$$|f^*(x+t) - f^*(x)| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (6)$$

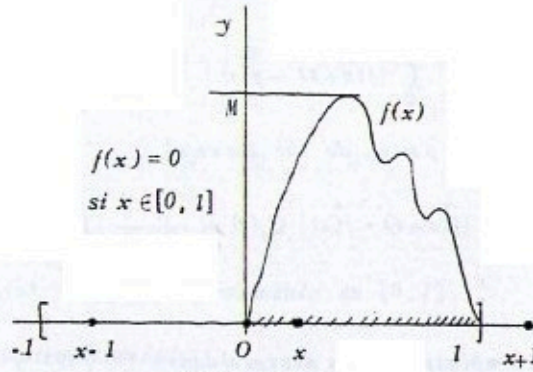


FIG. 72

Tenemos (por (2) y (5)) :

$$|P_n(x) - f^*(x)| = \left| \int_{-1}^{1} f^*(x+t)\, Q_n(t) - \int_{-1}^{1} f^*(x)\, Q_n(t)\, dt \right|$$

$$= \left| \int_{-1}^{1} [f^*(x+t) - f^*(x)]\, Q_n(t)\, dt \right| \leq \int_{-1}^{1} |f^*(x+t) - f^*(x)|\, Q_n(t)\, dt$$

$$= \int_{-1}^{-\delta} |f^*(x+t) - f^*(x)|\, Q_n(t)\, dt + \int_{-\delta}^{\delta} |f^*(x+t) - f^*(x)|\, Q_n(t)\, dt$$

$$+ \int_{\delta}^{1} |f^*(x+t) - f^*(x)|\, Q_n(t)\, dt. \quad (7)$$

En $[-1, -\delta]$, *ó* $[\delta, 1]$ *de (4) tenemos :*

$$Q_n(x) = c_n (1 - x^2)^n \leq \sqrt{n}\,(1 - \delta^2)^n \to 0 \quad (n \to \infty),$$

o sea que $Q_n \to 0$ *uniformemente en* $[-1, -\delta]$ *(ó en* $[\delta, 1]$*), luego existe* N *tal que* $n \geq N$ *implica :*

$$|Q_n(t)| < \frac{\epsilon}{8M} \quad \text{para todo} \quad x \in [-1, \delta] \cup [\delta, 1]$$

donde M = *el valor máximo de* $|f(x)|$. *Así :*

$$\int_{-1}^{-\delta} |f^*(x+t) - f^*(x)|\, Q_n(t)\, dt \leq \int_{-1}^{-\delta} \left(\underbrace{|f^*(x+t)|}_{\leq M} + \underbrace{|f^*(x)|}_{\leq M} \right) \underbrace{Q_n(t)}_{\leq \epsilon/8M} dt$$

$$\leq 2M \frac{\epsilon}{8M} \int_{-1}^{-\delta} dt < \frac{\epsilon}{4} \int_{-1}^{0} dt = \frac{\epsilon}{4}, \quad (8)$$

de la misma forma :

$$\int_{\delta}^{1} |f(x+t) - f(x)|\, Q_n(t)\, dt < \frac{\epsilon}{4} \quad . \tag{9}$$

Por otra parte , de (6) tenemos :

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)|\, Q_n(t)\, dt \leq \frac{\epsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\, dt < \frac{\epsilon}{2} \int_{-1}^{1} Q_n(t)\, dt$$

$$= \frac{\epsilon}{2} \quad . \tag{10}$$

Reemplazando las desigualdades (8) , (9) y (10) en (7) tenemos :

$$|P_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon \ ,$$

o sea que

$$P_n \to f \quad \textit{uniformemente en} \quad [0, 1] \ . \ \blacksquare$$

 # Nota 1

Por el cambio $X = \dfrac{x - a}{b - a}$ *se puede transformar el intervalo* $[a, b]$ *en* $[0, 1]$.

 # Nota 2

Considerando la función g *definida por :*

$$g(x) = f(x) - f(0) - x\,[f(1) - f(0)] \ ,$$

entonces

$$g(0) = g(1) = 0 \ .$$

Si obtenemos una sucesión de polinomios $\{g_n\}$ *tal que*

$$g_n \to g \quad \textit{uniformemente en} \quad [a, b] \ ,$$

se tiene la sucesión de polinomios $\{f_n\}$ *:*

$$f_n(x) = g_n(x) + f(0) + x[f(1) - f(0)] \to f(x) \quad \textit{uniformemente en } [a, b].$$

 # Nota 3

Sea $b(t) = (1 - t)^n - (1 - nt)$ *entonces* $b(0) = 0$,

$$b'(t) = n - n(1 - t)^{n-1} = n\,[1 - (1 - t)^{n-1}] \geq 0 \quad \textit{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \ ,$$

por lo tanto se tiene que $b(t) \geq 0$ *para* $t \in [0, 1]$. ■

Otra demostración (Bernstein).

Para mayor sencillez supongamos que $|f(x)| \leq 1$ *en* $[0, 1]$.

Consideremos los polinomios de grado n :

$$\phi_k(x) = \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

vamos a demostrar que :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n)\, \phi_k(x) \to f \quad \textit{uniformemente en } [0, 1].$$

Primero, demostremos la siguiente identidad:

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 \phi_k(x) = nx(1 - x). \tag{11}$$

Del desarrollo binomial :

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{12}$$

derivando con respecto a x *una y dos veces y multiplicando por* x *y* x^2 *respectivamente se tiene :*

$$n x (x + y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^k y^{n-k} \tag{13}$$

$$n(n - 1) x^2 (x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k - 1) x^k y^{n-k}. \tag{14}$$

En (12), (13) y (14) tomando $y = 1 - x$ *tenemos :*

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \phi_k(x) \tag{15}$$

$$nx = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k\, \phi_k(x) \tag{16}$$

$$n(n - 1) x^2 = \sum_{k=0}^{n} k(k - 1) \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k(k - 1)\, \phi_k(x), \tag{17}$$

Tenemos, por lo tanto :

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 \phi_k(x) = \sum_{k=0}^{n} (k^2 - 2knx + n^2 x^2)\, \phi_k(x)$$

$$= \sum_{k=o}^{n} [k(k-1) + k(1-2nx) + n^2 x^2]\, \phi_k(x)$$

$$= n(n-1)x^2 + (1-2nx)nx + n^2x^2 = nx(1-x). \bullet$$

Por la continuidad uniforme de f *en* $[0, 1]$ *, dado* $\epsilon > 0$ *existe* δ *tal que*

$$|x-y| < \delta \quad \text{implica} \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} . \tag{18}$$

De (15) tenemos :

$$f(x) - \sum_{k=o}^{n} f(k/n)\, \phi_k(x) = \sum_{k=o}^{n} f(x)\, \phi_k(x) - \sum_{k=o}^{n} f(k/n)\, \phi_k(x)$$

$$= \sum_{k=o}^{n} |f(x) - f(k/n)|\, \phi_k(x) . \tag{19}$$

Separamos la suma $\sum_{k=o}^{n}$ *en (19) en dos sumas* Σ' *y* Σ'' *:*

Σ' = *la suma para todos los* k *tales que* $|\frac{k}{n} - x| < \delta$,

Σ'' = *la suma para todos los* k *tales que* $|\frac{k}{n} - x| \geq \delta$,

entonces :

$$|\sum_{k} |f(x) - f(k/n)|\, \phi_k(x)| \leq \sum_{k}{}' |f(x) - f(k/n)|\, \phi_k(x) < \frac{\epsilon}{2} \tag{20}$$

$\wedge$ *(por (15))*

$\epsilon/2$ *(por (18))*

También :

$$|\sum_{k}{}'' |f(x) - f(k/n)|\, \phi_k(x)| \leq \sum_{k}{}'' \underbrace{\{|f(x)| + |f(k/n)|\}}_{/\wedge\ 2}\, \phi_k(x) \leq 2 \sum_{k}{}'' \phi_k(x)$$

pero como $|\frac{k}{n} - x| \geq \delta$ *, se tiene :*

$$\frac{(k-nx)^2}{(n\delta)^2} \geq 1 ,$$

por lo tanto :

$$2\sum_k'' \phi_k(x) \leq 2\sum_k'' \frac{(k-nx)^2}{(n\delta)^2}\phi_k(x) \leq \frac{2}{(n\delta)^2}\sum_k''(k-nx)^2\phi_k(x)$$

$$\leq \frac{2}{(n\delta)^2}\sum_{k=o}^{n}(k-nx)^2\phi_k(x) = \frac{2}{(n\delta)^2}nx(1-x) \leq \frac{1}{2n\delta^2} \qquad (21)$$

(por (11))

Nota

Si tomamos n *suficientemente grande para que*

$$\frac{1}{(2n\delta^2)} < \frac{\epsilon}{2} \quad (\text{ó} \quad n > \frac{1}{\epsilon\delta^2}),$$

de (19), (20) *y* (21) *tenemos :*

$$|f(x) - \sum_{k=o}^{n} f(k/n)\,\phi_k(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon .$$

Nota

Obsérvese que $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ *en* $[0, 1]$. ■

EJEMPLO 135

Sea $f(x) = e^x$ *en* $[0, 1]$

entonces

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x),$$

donde

$$|R_n(x)| = \left|\frac{e^\theta}{n!}x^n\right| \leq \frac{e^1}{n!} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Así que la sucesión de polinomios $\{g_n(x)\}$ *:*

$$g_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{x^k}{k!} \to f \quad \textit{uniformemente en } [0, 1].$$

Por otra parte, $P_n(x)$ *definida por* (5) *es :*

$$P_n(x) = c_n \int_o^1 e^t\,[1-(t-x)^2]^n\,dt .$$

Mientras que f_n *, definida en la segunda demostración, es :*

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{k/n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \{x\, e^{1/n} + (1-x)\}^n .$$

Obsérvese que las tres sucesiones $\{g_n\}$, $\{P_n\}$, $\{f_n\}$ *son diferentes* .●

El teorema 42 no es válido para intervalos no acotados como veremos en el siguiente ejemplo :

EJEMPLO 136

Sea $f(x) = e^x$ *en* $[0, \infty)$,

dado $\epsilon > 0$ *si existiera un polinomio* $P(x)$ *tal que*

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon \quad \text{para todo} \quad x \in [0, \infty)$$

se tendría :

$$f(x) \left| 1 - \frac{P(x)}{f(x)} \right| = e^x \left| 1 - \frac{P(x)}{e^x} \right| < \epsilon \quad \text{para todo} \quad x \geqslant 0 .$$

Tomando $x \to +\infty$:

$$\infty \leqslant \epsilon \quad (\text{absurdo !})$$

ya que

$$e^x \to +\infty , \quad \frac{P(x)}{e^x} \to 0 \quad (x \to +\infty) .$$ ●

El teorema 42 no es utilizable en intervalos no cerrados , como veremos a continuación :

EJEMPLO 137

Sea $f(x) = \frac{1}{x}$ *en* $(0, 1]$.

Dado $\epsilon > 0$ *si existiera un polinomio* $P(x)$ *tal que*

$$\left| \frac{1}{x} - P(x) \right| < \epsilon \quad \text{para todo} \quad x \in (0, 1]$$

tomando el límite cuando $x \to 0+$:

$$+\infty = +\infty - P(0) \leqslant \epsilon \quad (\text{absurdo !}) .$$ ●

EJERCICIO 277

Sea f *continua en* $[a, b]$, *demostrar que existe una sucesión de poli-*

nomios $\{P_n\}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} P_n = f \quad \text{en} \quad [a, b].$$

Sugerencia

La convergencia uniforme implica la convergencia en media en $[a, b]$. ■

EJERCICIO 278

Sea f continua en $[0, 1]$, si

$$\int_0^1 f(x)\, x^n\, dx = 0 \quad (\text{para todo } n = 0, 1, 2, \ldots),$$

demostrar que $f(x) = 0$ en $[0, 1]$.

Solución

Dado $\epsilon > 0$ existe un polinomio $P(x)$ tal que

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon \quad \text{para todo} \quad x \in [0, 1],$$

o sea que si $f(x) = P(x) + Q(x)$,

$$|Q(x)| < \epsilon,$$

y tenemos que :

$$\int_0^1 [f(x)]^2\, dx = \underbrace{\int_0^1 P(x)\, f(x)\, dx}_{\#\text{Nota}} + \int_0^1 Q(x)\, f(x)\, dx,$$

$$= 0$$

luego :

$$\int_0^1 [f(x)]^2\, dx = \int_0^1 Q(x)\, f(x)\, dx \leq \int_0^1 |Q(x)|\, |f(x)|\, dx$$

$$< \epsilon \int_0^1 |f(x)|\, dx .$$

Como ϵ es cualquiera y $|f(x)|$ es integrable, entonces se tiene que

$$\int_0^1 [f(x)]^2\, dx = 0,$$

esto es,

$$f(x) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \in [0, 1].$$

Nota

Sea $P(x) = a_o + a_1 x + \ldots + a_m x^m = \sum_{k=o}^{m} a_k x^k$

entonces

$$\int_o^1 f(x)\, P(x)\, dx = \int_o^1 f(x) \sum_{k=o}^{m} a_k x^k\, dx = \sum_{k=o}^{m} a_k \int_o^1 f(x)\, x^k\, dx = 0 .$$

■

EJERCICIO 279

Sea f continua en $[a, b]$. Si $f(a) = 0$ dado $\epsilon > 0$ existe un polinomio $P(x)$ tal que

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon \quad \text{para todo} \quad x \in [a, b] , \text{ y}$$

$$P(a) = 0 .$$

Solución

Por el teorema 42, dado $\epsilon > 0$ existe un polinomio $Q(x)$ tal que

$$|f(x) - Q(x)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{para todo} \quad x \in [a, b] .$$

Luego :

$$|f(a) - Q(a)| = |Q(a)| < \frac{\epsilon}{2} .$$

Tenemos :

$$|f(x) - (Q(x) - Q(a))| \leq |f(x) - Q(x)| + |Q(a)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon ,$$

donde $P(x) = Q(x) - Q(a)$ es un polinomio y $P(a) = 0$.

■

EJERCICIO 280

Sea f continua en $[0, \infty)$ tal que

$f(x) = 0$ para todo $x \geq b$ donde $b > 0$ es una constante.

Dado $\epsilon > 0$ existe un polinomio $P(t) = \sum_{k=o}^{m} a_k t^k$ tal que

$$\int_o^\infty \{f(x) - \sum_{k=o}^{m} a_k e^{-(k+1)x}\}^2\, dx < \epsilon .$$

Solución

Sea $F(t) = \begin{cases} \dfrac{f(-\log t)}{t} & \text{si} \quad \beta \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant \beta \end{cases}$

donde $\beta = e^{-b}$. F es continua en $[0, 1]$, por el teorema 42, dado $\epsilon > 0$ existe un polinomio $\sum_{k=0}^{m} a_k t^k$ tal que

$$| F(t) - \sum_{k=0}^{m} a_k t^k | < \sqrt{\epsilon} \quad \text{para todo} \quad t \in [0, 1].$$

Entonces :

$$\int_0^\infty \{ f(x) - \sum_{k=0}^{m} a_k e^{-(k+1)x} \}^2 \, dx \qquad (x = -\log t)$$

$$= \int_0^1 \{ f(-\log t) - \sum_{k=0}^{m} a_k t^{k+1} \}^2 \frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^1 \underbrace{\{ F(t) - \sum_{k=0}^{m} a_k t^k \}^2}_{\leqslant \sqrt{\epsilon}} \underbrace{t}_{\leqslant 1} dt < \epsilon \int_0^1 dt = \epsilon .$$

■

EJERCICIO 281

Sea f continua en $[-a, a]$, demostrar que

(i) Si f es par, dado $\epsilon > 0$ existe un polinomio par P tal que

$$| f(x) - P(x) | < \epsilon \quad \text{para todo} \quad x \in [-a, a].$$

(ii) Si f es impar, dado $\epsilon > 0$ existe un polinomio impar Q tal que

$$| f(x) - Q(x) | < \epsilon \quad \text{para todo} \quad x \in [-a, a].$$

Solución

(i) Por el teorema 42, dado $\epsilon > 0$ existe un polinomio $P_0(x)$ tal que

$$| f(x) - P_0(x) | < \epsilon \quad \text{para todo} \quad x \in [-a, a].$$

Reemplazando x por $-x$ (nótese que $f(-x) = f(x)$) :

$$|f(x) - P_o(-x)| < \epsilon \quad \text{para todo} \quad x \in [-a, a] ,$$

luego

$$|\{f(x) + f(x)\} - \{P_o(x) + P_o(-x)\}| \leq |f(x) - P_o(x)| + |f(-x) - P_o(-x)| < 2\epsilon,$$

ó

$$\left| f(x) - \frac{P_o(x) + P_o(-x)}{2} \right| < \epsilon ,$$

haciendo $P(x) = \{P_o(x) + P_o(-x)\}/2$ *obtenemos el polinomio par .*

(ii) Similar a (i) . ■

EJERCICIO 282

(i) Sean $f(x) = x - \frac{1}{2}$, $g(x) = x - x^2$, *demostrar que :*

$$\int_o^1 f(x)\,[g(x)]^n \, dx = 0 \quad \text{para todo} \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

(ii) Sea f continua en $[0, 1]$, *si*

$$\int_o^1 f(x)\,[x - x^2]^n \, dx = 0 \quad \text{para todo} \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (22)$$

¿ bajo qué condición adicional (22) implica $f = 0$ *?*

Solución

(i)
$$\int_o^1 \left(x - \frac{1}{2} \right)(x - x^2)^n \, dx \qquad \left(x - \frac{1}{2} = \frac{t}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{4^{n+1}} \int_{-1}^1 t(1 - t^2)^n \, dt = 0$$

ya que $t(1 - t^2)^n$ *es impar .*

(ii)
$$\int_o^1 f(x)(x - x^2)^n \, dx \qquad \left(x - \frac{1}{2} = \frac{t}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 4^n} \int_{-1}^1 f\left(\frac{t+1}{2}\right)(1 - t^2)^n \, dt = 0 \qquad (\text{para todo } n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Sea

$$f\left(\frac{t+1}{2}\right) = F(t) + G(t)$$

donde F *es par y* G *es impar, entonces*

$$\int_{-1}^{1} f\left(\frac{t+1}{2}\right)(1-t^2)^n\,dt = \int_{-1}^{1} F(t)\,(1-t^2)^n\,dt + \underbrace{\int_{-1}^{1} G(t)(1-t^2)^n\,dt}_{=0}$$

$$= \int_{-1}^{1} F(t)\,(1-t^2)^n\,dt = 0 \quad (\text{para todo } n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{23}$$

Por el ejercicio 281, dado $\epsilon > 0$ *existe un polinomio par* $P(t)$ *tal que*

$$|F(t) - P(t)| < \epsilon \quad \text{para todo} \quad t \in [-1, 1],$$

o sea:

$$F(t) = P(t) + \Delta(t), \quad |\Delta(t)| < \epsilon.$$

Tenemos:

$$\int_{-1}^{1} |F(t)|^2\,dt = \underbrace{\int_{-1}^{1} F(t)\,P(t)\,dt}_{=0 \text{ \# Nota}} + \int_{-1}^{1} F(t)\,\Delta(t)\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1} F(t)\,\Delta(t)\,dt < \epsilon \int_{-1}^{1} F(t)\,dt,$$

por lo tanto se tiene que

$$F(t) = 0.$$

Esto es, $f\left(\frac{t+1}{2}\right)$ *es una función impar de* t.

 # Nota

De la condición (23) por inducción se tiene que:

$$\int_{-1}^{1} F(t)\,t^{2k}\,dt = 0 \quad \text{para todo } k = 0, 1, 2, \ldots,$$

luego

$$\int_{-1}^{1} F(t)\,P(t)\,dt = 0 \quad (\text{ya que } P \text{ es un polinomio par.}) \quad \blacksquare$$

§ 40 Teorema de existencia

En este parágrafo, se trata de demostrar la existencia de la solución de una ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \tag{1}$$

con la condición inicial

$$y(0) = 0 \tag{2}$$

donde F es una función continua en $0 \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$.

Si la función F satisface además la condición de Lipshitz con respecto a la segunda variable, o sea que existe una constante K tal que

$$|F(x, y) - F(x, z)| \leqslant K\,|y - z|\,, \tag{3}$$

podemos demostrar fácilmente la existencia y la unicidad de la solución del problema como puede verse a continuación:

F es continua en el dominio rectangular $[0, a] \times [-b, b]$ (ver Fig. 73), sean

M = *Máximo de* F *en* $[0, a] \times [-b, b]$,

a_0 = *Mínimo de* $\left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$.

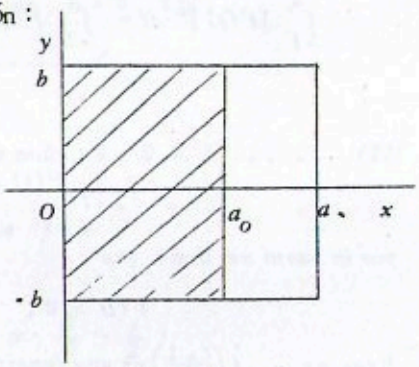


FIG. 73

Construimos una sucesión de funciones en $[0, a_0]$ *como sigue:*

$$f_0(x) = 0\,,$$

$$f_1(x) = \int_0^x F(t, 0)\, dt\,,$$

en general,

$$f_n(x) = \int_0^x F(t, f_{n-1}(t))\, dt\,. \tag{4}$$

Primero, podemos demostrar por inducción que #Nota 1 *:*

$$|f_n(x)| \leqslant b \quad \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant a_0 \quad (\text{para todo } n) \tag{5}$$

De la condición (3) se tiene :

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = \left| \int_o^x F(t, f_n(t))\, dt - \int_o^x F(t, f_{n-1}(t))\, dt \right|$$

$$\leqslant \int_o^x \underbrace{|F(t, f_n(t)) - F(t, f_{n-1}(t))|}_{/\!/\wedge} dt \leqslant \int_o^x K\, |f_n(t) - f_{n-1}(t)|\, dt .$$

$$K\, |f_n(t) - f_{n-1}(t)| \quad (\text{por } (3))$$

Así,

$$|f_1(x) - f_o(x)| \leqslant \int_o^x |F(t, 0)|\, dt \leqslant M \int_o^x dt = M x ,$$

$$|f_2(x) - f_1(x)| \leqslant \int_o^x K\, |f_1(t) - f_o(t)|\, dt \leqslant \int_o^x K M t\, dt = K M \frac{x^2}{2} ,$$

$$|f_3(x) - f_2(x)| \leqslant \int_o^x K\, |f_2(t) - f_1(t)|\, dt \leqslant \int_o^x K^2 M \frac{t^2}{2}\, dt = K^2 M \frac{x^3}{3!} ,$$

en general (por inducción # Nota 2) :

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{K^n M x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (\text{para todo } n) \ldots \qquad (6)$$

Por lo tanto se tiene :

$$|f_{n+q}(x) - f_n(x)| = \left| \sum_{k=n}^{n+q-1} [f_{k+1}(x) - f_k(x)| \right|$$

$$\leqslant \sum_{k=n}^{n+q-1} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n}^{n+q-1} \frac{K^k M x^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$= \frac{M}{K} \sum_{k=n}^{n+q-1} \frac{(Kx)^{k+1}}{(k+1)!} \leqslant \frac{M}{K} \sum_{k=n}^{n+q-1} \frac{(K a_o)^{k+1}}{(k+1)!} ,$$

o sea que la sucesión $\{f_n\}$ satisface la condición de Cauchy para la convergencia uniforme en $[0, a_o]$ puesto que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(K a_o)^{k+1}}{(k+1)!} \quad \text{converge} .$$

Luego, existe la función límite f :

$$f_n \to f \quad \text{uniformemente en } [0, a_o],$$

Nótese que f *es continua en* $[0, a_o]$ *ya que* f_n *es continua. En (4), tomando límite cuando* $n \to \infty$ *, se tiene :*

$$f(x) = \int_o^x F(t, f(t))\, dt \ ,$$

o sea :

$$\frac{df}{dx} = F(x, f(x)) \quad , \qquad f(0) = 0 \ ,$$

así se ha demostrado la existencia de la solución del problema.

Ahora vamos a demostrar la unicidad de la solución.

Supongamos que existen dos soluciones, f *y* g *:*

$$f'(x) = F(x, f(x)) \ , \quad g'(x) = F(x, g(x)) \ , \quad f(0) = g(0) = 0 \ ,$$

sea $b(x) = f(x) - g(x)$ *entonces :*

$$|b'(x)| = |f'(x) - g'(x)| = |F(x, f(x)) - F(x, g(x))|$$

$$\leq K\, |f(x) - g(x)| = K\, |b(x)| \ ,$$

$$b(0) = f(0) - g(0) = 0 \ .$$

Tenemos, por lo tanto :

$$|b(x)| = \left| \int_o^x b'(t)\, dt \right| \leq \int_o^x |b'(t)|\, dt \leq K \int_o^x |b(t)|\, dt \ . \quad (7)$$

Si $|b(x)| \leq B$ *en* $[0, a]$ *se tiene sucesivamente que :*

$$|b(x)| \leq K \int_o^x B\, dt = KB\, x$$

$$|b(x)| \leq K \int_o^x K B\, t\, dt = B\, K^2 \frac{x^2}{2} \ ,$$

$$|b(x)| \leq K \int_o^x B\, K^2 \frac{t^2}{2}\, dt = B\, K^3 \frac{x^3}{3!} \ ,$$

en general , por inducción :

$$|b(x)| \leq B \frac{(Kx)^n}{n!} \quad \text{(para todo } n\text{)} . \tag{8}$$

En (8) , tomando límite cuando $n \to \infty$ *obtenemos :*

$$|b(x)| \leq 0$$

ya que $\lim_{n\to\infty} (Kx)^n/n! = 0$, *o sea que* $b(x) = 0$. ■

 # Nota 1

Si $|f_n(x)| \leq b$ *tenemos :*

$$|f_{n+1}(x)| = \left| \int_0^x F(t, f_n(t))\, dt \right| \leq \int_0^x |F(t, f_n(t))|\, dt$$

$$\leq \int_0^x M\, dt = Mx \leq M\, a_0 \leq b .$$

 # Nota 2

Supongamos válida la desigualdad (6) , entonces :

$$|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| \leq \int_0^x K\, |f_{n+1}(t) - f_n(t)|\, dt$$

$$\leq \int_0^x K \frac{K^n M t^{n+1}}{(n+1)!}\, dt = \frac{K^{n+1} M x^{n+2}}{(n+2)!} .$$

■

En la demostración anterior , f_1 es la primera aproximación de la solución , f_2 es la segunda aproximación , f_n es la n-ésima aproximación de la solución , así sucesivamente obtenemos la mejor aproximación para alcanzar a su función límite gracias a la condición de Lipshitz. Sin embargo, sin suponer la condición de Lipshitz se puede demostrar la existencia de la solución del problema utilizando un método totalmente diferente, lo daremos al final de este parágrafo.

Dada una sucesión de funciones , no siempre convergente , en los siguientes teoremas se trata de hallar una sub-sucesión convergente empleando

un método común (método de diagonal), este método es una de las herramientas más importantes para estudiar análisis más avanzado.

TEOREMA 43 (Teorema de Helley) ⊕

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de variación uniformemente acotada en $[a, b]$ *(ver el ejercicio 270)*, es decir, existe una constante K tal que

$$|V_{f_n}| \leq K \qquad \text{para todo } n = 1,2,3,\ldots ,$$

si $f_n(a) = 0$ para todo n, existe una sub-sucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge a una función límite f tal que

$$|V_f| \leq K , \qquad f(a) = 0 .$$

Demostración

[1] *Primero supongamos que las funciones* f_n , $n = 1,2,3, \ldots$ *son crecientes. Sea* $Q = \{\lambda_k\}$ *un conjunto contable denso en* $[a, b]$, *entonces la sucesión de números:*

$$\{f_n(\lambda_1) , \ n = 1,2,3, \ldots \}$$

es una sucesión acotada # *Nota* , *luego existe una subsucesión convergente que notaremos:*

$$\{ f_{1,n}(\lambda_1) , n = 1,2,3, \ldots \} , \quad \lim_{n\to\infty} f_{1,n}(\lambda_1) = \mu_1 .$$

La sucesión:

$$\{ f_{1,n}(\lambda_2) , \ n = 1,2,3, \ldots \}$$

es una sucesión numérica acotada, luego existe una sub-sucesión:

$$\{ f_{2,n}(\lambda_2) , n = 1,2,3, \ldots \}$$

que tiende a un límite μ_2. *Así sucesivamente se obtiene una sub-sucesión* $\{ f_{k,n} , n = 1,2,3, \ldots \}$ *tal que*

* * * * * * * * * * * * * * * *

Nota $\{f_n\}$ *es una sucesión uniformemente acotada ya que*

$$|f_n(x)| = |f_n(x) - f_n(a)| \leq V_{f_n} \leq K \quad \text{para todo } x, \text{ todo } n .$$

$$\lim_{n\to\infty} f_{k,n}(\lambda_k) = \mu_k \ .$$

. . . . . .

$$\begin{array}{l} S_1 = \{ f_{1,1}, f_{1,2}, f_{1,3}, \ldots, f_{1,n}, \ldots \} \\ \cup \\ S_2 = \{ f_{2,1}, f_{2,2}, f_{2,3}, \ldots, f_{2,n}, \ldots \} \\ \cup \\ S_3 = \{ f_{3,1}, f_{3,2}, f_{3,3}, \ldots, f_{3,n}, \ldots \} \\ \cup \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \cup \\ S_k = \{ f_{k,1}, f_{k,2}, f_{k,3}, \ldots, f_{k,n}, \ldots \} \\ \cup \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \end{array}$$

FIG. 74

Evidentemente la sucesión $\{ f_{1,1}, f_{2,2}, f_{3,3}, \ldots \}$ *es una subsucesión de* $\{ f_{1,n}, n = 1, 2, 3, \ldots \}$, *luego :*

$$\lim_{n\to\infty} f_{n,n}(\lambda_1) = \mu_1 \ ,$$

$\{ f_{2,2}, f_{3,3}, \ldots, f_{n,n}, \ldots \}$ *es una sub-sucesión de* $\{ f_{2,n}, n = 1, 2, 3, \ldots \}$, *luego :*

$$\lim_{n\to\infty} f_{n,n}(\lambda_2) = \mu_2 \ ,$$

en general, $\{ f_{k,k}, f_{k+1,k+1}, f_{k+2,k+2}, \ldots \}$ *es una sub-sucesión de* $\{ f_{k,n}, n = 1, 2, 3, \ldots \}$, *por lo tanto :*

$$\lim_{n\to\infty} f_{n,n}(\lambda_k) = \mu_k \quad (\text{para todo } k). \tag{9}$$

O sea que la sucesión de funciones $\{ f_{n,n} \}$ *converge en*

$$x = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots \ .$$

Si $\lambda_k < \lambda_b$ *se tiene que* $f_{n,n}(\lambda_k) \leq f_{n,n}(\lambda_b)$, *luego :*

$$\lambda_k < \lambda_b \quad \text{implica} \quad \mu_k \leqslant \mu_b \tag{10}$$

Si $x_o \in Q = \{\lambda_k\}$, *existe una sucesión decreciente de puntos de* Q *que tiende a* x_o, *digamos:*

$$\lambda_{t_1} > \lambda_{t_2} > \cdots > \lambda_{t_k} > \cdots \to x_o .$$

De (10) tenemos:

$$\mu_{t_1} \geqslant \mu_{t_2} \geqslant \cdots \geqslant \mu_{t_k} \geqslant \cdots ,$$

esto es, existe el límite

$$\lim_{k\to\infty} \mu_{t_k} .$$

Evidentemente el límite, $\lim_{k\to\infty} \mu_{t_k}$, *sólo depende del punto* x_o *(independiente de la escogencia de la sucesión decreciente que se haya tomado), por lo tanto podemos definir una función* g *como sigue:*

$$\left.\begin{aligned} g(x_o) &= \lim_{k\to\infty} \mu_{t_k} \quad \text{si} \quad x_o \in Q \\ g(\lambda_k) &= \mu_k \quad \text{si} \quad \lambda_k \in Q . \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

De (10), la función g *es creciente.*

Si x_o *es un punto de continuidad de la función* g, *tenemos* # Nota 1 *:*

$$f_{n,n}(x_o) \to g(x_o) \qquad (n\to\infty) \quad . \tag{12}$$

Los puntos de discontinuidad de la función g *forman un conjunto contable (ya que* g *es creciente), digamos:*

$$\{\nu_k \ , \ k = 1, 2, 3, \ldots \} .$$

De la sucesión de la función $\{f_{n,n}\}$ *se puede escoger una sub-sucesión* $\{f_{n_k} \ , \ k = 1, 2, 3, \ldots \}$ *tal que* $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(\nu_j)$ *sea convergente para todo* j *(aplicando un procedimiento idéntico al utilizado al escoger la sub-sucesión* $\{f_{n,n}\}$ *de la sucesión original.). Definimos la función* f *como sigue:*

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= g(x) \quad \text{si} \quad x \in \{\nu_j\} \\ f(\nu_j) &= \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(\nu_j) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

y se tiene que:

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \qquad \text{para todo } x.$$

Es claro que f es creciente y además

$$|V_f| \leq K \ , \quad f(a) = 0 \ .$$

[II] Caso general.

Como f_n es de variación acotada, se puede descomponer f_n:

$$f_n = p_n - q_n$$

donde

$$\begin{cases} p_n = \text{la variación positiva de } f_n \\ q_n = \text{la variación negativa de } f_n \ . \end{cases}$$

entonces p_n y q_n son crecientes y $p_n(a) = q_n(a) = 0$, además:

$$V_{f_n} = V_{p_n} + V_{q_n} \leq K \qquad (\text{para todo } n).$$

De [I], podemos encontrar una sub-sucesión #Nota 2 de $\{f_n\}$, digamos $\{f_{n_k}\}$ tal que

$$p_{n_k} \to p \ , \quad q_{n_k} \to q \qquad (k \to \infty),$$

o sea

$$f_{n_k} = (p_{n_k} - q_{n_k}) \to (p - q) \qquad (k \to \infty).$$

Evidentemente:

$$V_{p-q} = V_p + V_q \leq K \ , \quad p(a) - q(a) = 0 \ . \ \blacksquare$$

#Nota 1 (demostración de (12))

Si g es continua en x_o, dado $\epsilon > 0$ existe δ tal que

$$|x - x_o| < \delta \qquad \text{implica} \qquad |g(x) - g(x_o)| < \epsilon \tag{i}$$

Sean

$$\lambda_k \in (x_o - \delta, x_o) \ , \quad \lambda_b \in (x_o \ , \ x_o + \delta)$$

• (Nótese que Q es denso en toda parte.)

entonces

$$|\mu_b - \mu_k| \leq \underbrace{|\mu_b - g(x_o)|}_{\wedge \ \epsilon \ (por\ (i))} + \underbrace{|g(x_o) - \mu_k|}_{\wedge \ \epsilon \ (por\ (i))} < 2\epsilon \ . \qquad (ii)$$

Como $f_{n,n}(\lambda_b) \to \mu_b$ *y* $f_{n,n}(\lambda_k) \to \mu_k$, *existe* N *tal que*

$$n \geq N \ \text{implica} \quad |f_{n,n}(\lambda_b) - \mu_b| < \epsilon, \ |f_{n,n}(\lambda_k) - \mu_k| < \epsilon \ , \qquad (iii)$$

luego :

$$|f_{n,n}(\lambda_b) - f_{n,n}(\lambda_k)|$$

$$\leq \underbrace{|f_{n,n}(\lambda_b) - \mu_b|}_{\wedge \ \epsilon \ (por\ (iii))} + \underbrace{|\mu_b - \mu_k|}_{\wedge \ 2\epsilon \ (por\ (ii))} + \underbrace{|\mu_k - f_{n,n}(\lambda_k)|}_{\wedge \ \epsilon \ (por\ (iii))} < 4\epsilon \ . \qquad (iv)$$

De (i) , (iii) *y* (iv) *tenemos :*

$$|f_{n,n}(x_o) - g(x_o)| \leq \underbrace{|f_{n,n}(x_o) - f_{n,n}(\lambda_k)|}_{/\!/\wedge \left(f_{n,n} \text{ es creciente}\right)} + \underbrace{|f_{n,n}(\lambda_k) - \mu_k|}_{\wedge \ \epsilon \ (por\ (iii))} + \underbrace{|\mu_k - g(x_o)|}_{\wedge \ \epsilon \ (por\ (i))}$$

$$|f_{n,n}(\lambda_b) - f_{n,n}(\lambda_k)|$$

$$/\!/\wedge$$

$$4\epsilon \ (por\ (iv))$$

$$< 6\epsilon \ .$$

esto es :

$$\lim_{n \to \infty} f_{n,n}(x_o) = g(x_o) \ . \ \bullet$$

 # Nota 2

De la sucesión $\{p_n\}$ *escogemos una subsucesión convergente , digamos* $\{p_{s_k}\}$. *Ahora , de la sucesión* $\{q_{s_k}\}$ *escogemos una subsucesión convergente , digamos* $\{q_{n_k}\}$, *así las dos sucesiones* $\{p_{n_k}\}$ *y* $\{q_{n_k}\}$ *son convergentes .*

Observación

El teorema de Helley es también válido para R^1 suponiendo :

$$f_n(-\infty) = 0 \quad , \quad V_{f_n}(-\infty, \infty) \leq K \quad \text{para todo } n \, . \quad \blacksquare$$

TEOREMA 44

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones equicontinua en $[a, b]$. Si para todo $x \in [a, b]$ la sucesión numérica $\{f_n(x)\}$ es acotada, existe una subsucesión uniformemente convergente en $[a, b]$.

Demostración

Sea $Q = \{\lambda_k\}$ *un conjunto contable denso en* $[a, b]$. *La sucesión numérica* $\{f_n(\lambda_1)\}$ *es acotada, luego existe una sub-sucesión convergente, digamos* $\{f_{1,n}(\lambda_1)\}$. $\{f_{1,n}(\lambda_2)\}$ *es una sucesión acotada, luego existe una sub-sucesión convergente, digamos* $\{f_{2,n}(\lambda_2)\}$. *Así sucesivamente,* $\{f_{k,n}, n = 1, 2, 3, \ldots\}$ *es una sub-sucesión de* $\{f_{k-1,n}, n = 1, 2, \ldots\}$ *tal que* $\{f_{k,n}(\lambda_k), n = 1, 2, 3, \ldots\}$ *es convergente. La sucesión :*

$$\{f_{n,n}\} = \{f_{1,1}, f_{2,2}, f_{3,3}, \ldots\}$$

converge en $x = \lambda_k$ *(para todo* k *).*

Como $\{f_n\}$ *es equicontinua, dado* $\epsilon > 0$ *existe* δ *tal que*

$$|x - y| < \delta \quad \text{implica} \quad |f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon \quad \text{(para todo } n\text{)}. \quad (14)$$

Consideremos una partición del intervalo $[a, b]$:

$$x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_m = b$$

tal que

$$\max_k (x_k - x_{k-1}) < \delta \, . \quad (15)$$

Q *es denso en* $[a, b]$, *cada sub-intervalo* $[x_{k-1}, x_k]$ *contiene por lo menos un punto de* Q, *digamos :*

$$\lambda_k \in [x_{k-1}, x_k] \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Las sucesiones numéricas $\{f_{n,n}(\lambda_k)\}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ *son convergentes, por la condición de Cauchy existe* N *tal que*

$$n, p \geq N \quad \text{implica} \quad |f_{n,n}(\lambda_k) - f_{p,p}(\lambda_k)| < \epsilon . \tag{16}$$

$$(\text{para todo } k = 1, 2, \ldots, m)$$

Si $x \in [a, b]$, *existe algún* k *tal que* $x \in [x_{k-1}, x_k]$, *luego tenemos*

$$|f_{n,n}(x) - f_{p,p}(x)| \leq \underbrace{|f_{n,n}(x) - f_{n,n}(\lambda_k)|}_{\wedge \atop \epsilon \text{ (por (14))}} + \underbrace{|f_{n,n}(\lambda_k) - f_{p,p}(\lambda_k)|}_{\wedge \atop \epsilon \atop \text{(por (16))}} + \underbrace{|f_{p,p}(\lambda_k) - f_{p,p}(x)|}_{\wedge \atop \epsilon \atop \text{(por (14))}}$$

$$< 3\epsilon ,$$

esto es, $\{f_{n,n}\}$ *satisface la condición de Cauchy, o sea:*

$\{f_{n,n}\}$ *converge uniformemente en* $[a, b]$. ■

Nótese que la demostración del teorema 44 es esencialmente igual a la del teorema de Helley, pero el teorema 44 es sólo válido en un intervalo compacto.

EJERCICIO 283

Sea $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones integrables uniformemente acotada en* $[a, b]$, *sea*

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt \qquad (a \leq x \leq b) ,$$

demostrar que existe una sub-sucesión de $\{F_n\}$, *uniformemente convergente en* $[a, b]$.

Solución

Sea M *una cota uniforme de* $|f_n(t)|$ *en* $[a, b]$:

$$|f_n(t)| \leq M \qquad \text{para todo } n \text{ y todo } t \in [a, b],$$

entonces

$$|F_n(x) - F_n(y)| = \left| \int_a^x f_n(t)\,dt - \int_a^y f_n(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_y^x f_n(t)\,dt \right| \leq \int_y^x |f_n(t)|\,dt \leq M\,|x - y|\,.$$

Por lo tanto, $\{F_n\}$ *es una sucesión equicontinua en* $[a, b]$. *Además,*

$$|F_n(x)| \leq M\,(b - a) \qquad \text{para todo } n\,,$$

luego existe una sub-sucesión uniformemente convergente en $[a, b]$ *(Teorema 44).* ■

Aplicando el teorema 44, demostraremos el siguiente teorema de existencia :

TEOREMA 45

Sea $F(x, y)$ una función continua en $0 < x < a$, $-b < y < b$, la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)\,, \qquad y(0) = 0$$

tiene por lo menos una solución en una vecindad de $x = 0$.

Demostración

Sea M *una cota de* $|F(x, y)|$, *sea*

$$a_o = \text{Mínimo } \{a\,,\ b/M\}\,,$$

construyamos una sucesión de funciones que sean soluciones aproximadas del problema en $[0, a_o]$ *como sigue :*

Para n *fijo, sean*

$$x_i = \frac{i}{n}\,a_o \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)\,,$$

definimos ahora f_n *: (ver Fig. 75)*

$$\left.\begin{aligned} &f_n(0) = 0 \\ &f_n(t) = F(0,0)\,t \qquad si \quad t \in [0, x_1] \\ &\quad \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

$$f_n(t) = f_n(x_k) + F(x_k, f_n(x_k))\,(t - x_k) \quad si \quad t \in [x_k, x_{k+1}] \,. \int$$

f_n *así definida es continua en* $[0, a_o]$, $|f_n(t)| \leq b$ *y*

$$f_n'(t) = F(x_k, f_n(x_k)) \quad si \quad t \in (x_k, x_{k+1}) \tag{18}$$

Sea

$$\begin{cases} \Delta_n(t) = f_n'(t) - F(t, f_n(t)) & si \quad t \neq x_o, x_1, \ldots, x_n \\ = 0 & si \quad t = x_o, x_1, \ldots, x_n \end{cases} \tag{19}$$

entonces tenemos:

$$|\Delta_n(t)| \leq |f_n'(t)| + |F(t, f_n(t))| \leq 2M,$$

$$f_n(x) = \int_o^x \{ F(t, f_n(t)) + \Delta_n(t) \}\, dt \tag{20}$$

Luego:

$$|f_n(x') - f_n(x)| = \left| \int_x^{x'} \{F(t, f_n(t)) + \Delta_n(t)\}\, dt \right|$$

$$\leq \int_x^{x'} \{|F(t, f_n(t))| + |\Delta_n(t)|\}\, dt \leq 3M\,|x' - x|\,, \tag{21}$$

o sea que la sucesión $\{f_n\}$ *es equicontinua y uniformemente acotada en* $[0, a_o]$. *Por el teorema 44 existe una sub-sucesión, digamos* $\{f_{n_k}\}$, *uniformemente convergente a una función límite* f *en* $[0, a_o]$:

$$f_{n_k} \to f \quad uniformemente \ en \ [0, a_o].$$

* * * * * * * * * * * *

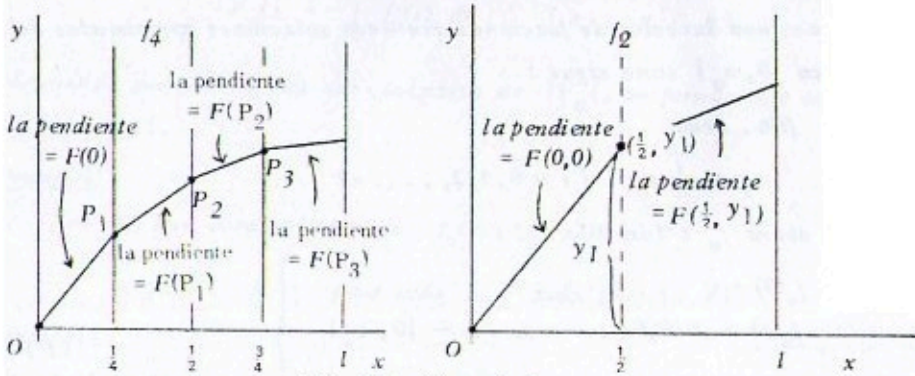


FIG. 75 (f_2, f_4)

De (18) y (19):

$$\Delta_n(t) = F(x_k, f_n(x_k)) - F(t, f_n(t)) \quad \text{si} \quad t \in (x_k, x_{k+1}),$$

luego # Nota :

$$\Delta_n(t) \to 0 \quad \text{uniformemente en} \quad [0, a_o].$$

También :

$$F(t, f_{n_k}(t)) \to F(t, f(t)) \quad \text{uniformemente en} \quad [0, a_o].$$

En (20), tomando $n = n_k \to \infty$ se tiene :

$$f(x) = \int_0^x F(t, f(t))\, dt,$$

o sea que f es una solución del problema en $[0, a_o]$. ■

Nota

F es uniformemente continua en $[0, a] \times [-b, b]$, dado $\epsilon > 0$ existe δ tal que

$$|(x, y) - (x', y')| < \delta \quad \text{implica} \quad |F(x, y) - F(x', y')| < \epsilon. \quad (22)$$

De (21), si $t \in (x_k, x_{k+1})$ se tiene :

$$|f_n(x_k) - f_n(t)| \leq 3M\,|x_k - t| \leq 3M\,\frac{a_o}{n} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

por lo tanto si n es suficientemente grande se tiene :

$$|f_n(x_k) - f_n(t)| \leq \delta/\sqrt{2}, \quad |x_k - t| < \frac{a_o}{n} < \delta/\sqrt{2},$$

o sea (por (22)) :

$$|F(x_k, f_n(x_k)) - F(t, f_n(t))| < \epsilon.$$

■

De (18) y (19):

$$\Delta_n(t) = F(x_k, f_n(x_k)) - F(t, f_n(t)) \quad \text{si} \quad t \in (x_k, x_{k+1}),$$

luego # Nota :

$$\Delta_n(t) \to 0 \quad \text{uniformemente en} \quad [0, a_o].$$

También :

$$F(t, f_{n_k}(t)) \to F(t, f(t)) \quad \text{uniformemente en} \quad [0, a_o].$$

En (20), tomando $n = n_k \to \infty$ se tiene :

$$f(x) = \int_0^x F(t, f(t))\, dt,$$

o sea que f es una solución del problema en $[0, a_o]$. ■

Nota

F es uniformemente continua en $[0, a] \times [-b, b]$, dado $\epsilon > 0$ existe δ tal que

$$|(x, y) - (x', y')| < \delta \quad \text{implica} \quad |F(x, y) - F(x', y')| < \epsilon. \quad (22)$$

De (21), si $t \in (x_k, x_{k+1})$ se tiene :

$$|f_n(x_k) - f_n(t)| \leq 3M\,|x_k - t| \leq 3M\,\frac{a_o}{n} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

por lo tanto si n es suficientemente grande se tiene :

$$|f_n(x_k) - f_n(t)| \leq \delta/\sqrt{2}, \quad |x_k - t| < \frac{a_o}{n} < \delta/\sqrt{2},$$

o sea (por (22)) :

$$|F(x_k, f_n(x_k)) - F(t, f_n(t))| < \epsilon.$$

■

INDICE

Abel
Criterio de Abel (serie numérica) 122
Criterio de Abel (serie de funciones) 308
Teorema de Abel
(producto de dos series) 206, 383
(puntos extremos del círculo) 310, 381, 386
Absoluto
Convergencia absoluta de una serie 108
Convergencia absoluta de un producto 230
Acotación de una sucesión 2
Convergencia acotada 318
Sucesión uniformemente acotada 278
Alternada , serie alternada 106
Aproximación
Teorema de aproximación de Weierstrass 419
Aritmética , serie aritmética 71
Arzelá
Teorema de Arzelá 318
Bendixon
Teorema de Bendixon 414
Bernstein
Teorema de Bernstein 376
Demostración de Bernstein 423
Binomial ,serie binomial 372, 379, 387
Borel , suma de Borel 137
Cajori
Problema de Cauchy-Cajori 218
Cauchy
Condición de Cauchy
para la sucesión numérica 32
para la serie numérica 84
para el producto infinito 225
para la sucesión de funciones 295
para la serie de funciones 298
Producto de Cauchy 202
Césaro , suma de Césaro 137
Círculo de convergencia 343
Circunferencia de convergencia 343
Consistencia de la sumación 137
Continuidad de la función límite 263
Convergencia de una sucesión 3
Convergencia condicional 109
Convergencia absoluta (serie) 108
Convergencia absoluta (producto) 230
Convergencia acotada 318
Convergencia en media 329
Convergencia uniforme (serie) 258
Convergencia uniforme (producto) 336
Cota superior 21
Creciente , sucesión creciente 1
Decreciente , sucesión decreciente 1
Diagonal , método de diagonal 436
Dini
Teorema de Dini 290
Dirichlet
Criterio de Dirichlet (serie numérica) 121
Criterio de Dirichlet (funciones) 305
Producto de Dirichlet 210
Serie de Dirichlet 395
Divergente , sucesión divergente 3
Doble serie 189
Doble sucesión 180
Elemento de una sucesión 1
Equicontinuidad 293 , 441
Euler
Constante de Euler 116
Existencia
Teorema de existencia (con Lipshitz) 432
Teorema de existencia (sin Lipshitz) 443
Expansión decimal 10
Extremo superior 23
Extremo inferior 24
Función límite 256
Geométrica , serie geométrica 71
Helley
Teorema de Helley 430
Inferiormente (acotación) 2
Inserción en paréntesis 125
Integral impropia 112

Inversa
función inversa de una serie de potencias 364
Kummer
Criterio de Kummer 49
Leroy (suma de Leroy) 137
Límite de doble serie 189
Límite de una sucesión 3
Límite de una serie 70
Límite inferior 29
Límite superior 28
Límite iterado 184
Lipshitz (condición de Lipshitz) 432
Media (convergencia en media) 329
Método de diagonal 436
Mertens (Teorema de Mertens) 207
Monótona (sucesión monótona de funciones) 290
n-ésimo término de una sucesión 1
Norma de una partición 412
O grande 91
o pequeno 94
Potencias (serie de potencias) 342
Producto de dos series 201
Producto de Cauchy 202
Producto de Dirichlet 210
Producto infinito 221
convergencia uniforme de un producto 336
Radio de convergencia 344
Reordenación de una serie 128
Reordenación de una doble serie 197
Reordenación cuadrada de N 194
Reordenación de una serie en doble serie 193
Resto de Taylor 369
Riemann
Funcion zeta de Riemann 168, 396
Riesz (suma de Riesz) 137
Seidel 63
Series 68
Serie alternada 106
Serie aritmética 71
Serie binomial 372, 379, 387
Serie de Dirichlet 395
Serie de potencias 342
Serie de términos positivos 86
Serie geométrica 71
Serie telescópica 77
Sub-sucesión 5
Sigma σ_n 40
Sucesión 1
Sucesión de funciones 256
Sucesión monótona de funciones 290
Suma de dos sucesiones 6
Suma de Césaro 137
Sumable en Césaro 137
Suma parcial de una serie 69
Suma total de una serie 70
Superior (acotacion superior) 2
Taylor , Fórmula de Taylor 368
Resto de Taylor 368
Telescópica (serie telescópica) 77
Término de una sucesión 1
Unicidad del límite 4
Uniforme , convergencia uniforme 258
Uniformemente acotado 278
Variación positiva (negativa) 439
Variación uniformemente acotada 412, 436
Weierstrass , Teorema de 9
Criterio de Weierstrass 151
Criterio M de Weierstrass 301
Teorema de aproximación de 419
Zeta , función zeta de Riemann 168, 390

BIBLIOGRAFIA

T.J. Bromwichi, *An introduction to the theory of infinite series, second edition, Mac Millan, London, 1955*

L.B.W. Jolley, *Summation of series, second Edition, Dover, New York, 1960*

E.T. Whittaker, G.N. Watson, *Modern Analysis, Cambridge University Press Cambridge, 1935*

Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis, Mac Graw Hill, New York, 1964*

J. Dieudonné, *Fundamentos de análisis moderno, Reverté, México, 1966*

T.M. Apostol, *Mathematical analysis, Addison Wesley, 1957*

T. Takagui, *Análisis matemático, Iwanami, Tokyo, 1944*

F. J. Murray, *Existence theorems for ordinary differential equations, New York University Press, 1954*